

NOTATION
PARTIELLE

①

Exercice 11 a) Déterminons l'équation cartésienne de la sphère (S)

La sphère (S) de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R=2$ donc l'équation cartésienne de (S) s'écrit sous la forme $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2^2$

c-à-d : $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

b) Vérifions que $A \in (S)$ et $B \in (S)$

• On a $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 4 = 0 + 0 + 4 - 4 = 0$ donc $A \in (S)$

• On a $x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - 4 = 4 + 0 + 0 - 4 = 0$ donc $B \in (S)$

donc $A \in (S)$ et $B \in (S)$

2) Soit I le milieu du segment [AB]

a) Déterminons l'intersection du plan (OAB) avec (S)

On a $O \in (OAB)$ donc $d(O, (OAB)) = 0$, d'où le plan (OAB) coupe la sphère suivant le cercle de centre I et de rayon R de la sphère. (Ce cercle appelé Grand cercle)

b) Vérifions que $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$ et montrons que $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$

• On a $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$ c-à-d. $I(1, 0, 1)$

donc $\vec{OI}(1, 0, 1)$ et $\vec{AB}(2, 0, -2)$ donc $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 2 - 2 = 0$

• On a $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$ donc $(OI) \perp (AB)$ ①

Comme I est le milieu du segment [AB] donc $I \in (AB)$ ②

D'après ① et ② on déduit que I est le projeté orthogonal

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

2

du pt O sur la droite (AB) . Donc $d(O, (AB)) = OI$

or $OI = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, d'où $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$

3) on considère un pt $M(0, m, 0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$

a) vérifions que: $\vec{AB} \wedge \vec{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$

on a $\vec{AB}(2, 0, -2)$ et $\vec{AM}(0, m, -2)$ donc

$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AM} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & m & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & m \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}\end{aligned}$$

donc $\vec{AB} \wedge \vec{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$

b) Déduisons que $(ABM): mx + 2y + mz - 2m = 0$

on a $\vec{AB} \wedge \vec{AM}(2m, 4, 2m)$ est un vecteur normal au plan (ABM) donc une équation cartésienne du plan (ABM) s'écrit sous la forme $2mx + 4y + 2mz + d = 0$

or $A(0, 0, 2) \in (ABM) \Leftrightarrow 4m + d = 0 \Leftrightarrow d = -4m$

donc $2mx + 4y + 2mz - 4m = 0$ d'où $(ABM): mx + 2y + mz - 2m = 0$

c) Montrons que: $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

on a $d(O, (ABM)) = \frac{|m \cdot 0 + 2 \cdot 0 + m \cdot 0 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 4 + m^2}} = \frac{|-2m|}{\sqrt{2m^2 + 4}} = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

donc $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

4) Montrons que $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}}$ et déduisons $\sqrt{2} < r \leq 2$

on a le plan (ABM) coupe (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r alors:

$$r = \sqrt{R^2 - (d(O, (ABM)))^2}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{4 - \frac{4m^2}{4+2m^2}} = \sqrt{\frac{16+8m^2-4m^2}{4+2m^2}} = \sqrt{\frac{16+4m^2}{4+2m^2}} \\ &= \sqrt{\frac{8+2m^2}{2+m^2}}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 4 + 2m^2}{2 + m^2}} = \sqrt{\frac{2(2 + m^2) + 4}{2 + m^2}} = \sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}}$$

donc: $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}}$

soit $m \in \mathbb{R}$, on a:

• on a $\frac{4}{2 + m^2} > 0$, alors: $2 + \frac{4}{2 + m^2} > 2$ donc:

$$\sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}} > \sqrt{2} \quad \text{c-à-d: } r > \sqrt{2} \quad (1)$$

D'autre part, on a $m^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{4}{2 + m^2} \leq 2$

$$\Rightarrow 2 + \frac{4}{2 + m^2} \leq 4$$

$$\Rightarrow r \leq 2 \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on déduit que $(\forall m \in \mathbb{R}), \sqrt{2} < r \leq 2$

Exercice 2

1 a) Vérifions que $a + b = 2$ et déduisons que l'affixe du pt P milieu du segment $[AB]$ est $p = 1$

on a: $a + b = 1 + 2i + (\overline{1 + 2i}) = 1 + 2i + 1 - 2i = 2$

• L'affixe du pt P milieu du segment $[AB]$ est $p = \frac{a + b}{2} = 1$

b) Montrons que a et b sont les solutions de (E): $z^2 - 2z + 5 = 0$

on a $a^2 - 2a + 5 = (1 + 4i - 4) - 2 - 4i + 5 = -5 + 5 = 0$

$b^2 - 2b + 5 = (1 - 2i)^2 - 2(1 - 2i) + 5 = 1 - 4i + 4 - 2 + 4i + 5 = 0$

Donc a et b sont les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$

2 a) Vérifions que $|w - a| = |w - b| = |w - c|$

on a: $|w - a| = \left| \frac{5}{2} - 1 - 2i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

$|w - b| = \left| \frac{5}{2} - 1 + 2i \right| = \left| \frac{3}{2} + 2i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

$|w - c| = \left| \frac{5}{2} - \frac{9}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \left| -2 - \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

donc: $|w - a| = |w - b| = |w - c|$

تنبيه: يمنع على الترشح (ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته (ا)

b) Déduisons que z est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

On a $|w-a| = |w-b| = |w-c| = \frac{5}{2}$ donc

$Az = Bz = Cz = \frac{5}{2}$ d'où les pt A, B et C appartiennent au cercle de centre z et de rayon $\frac{5}{2}$ circonscrit au triangle ABC.

3 a) Vérifions que $\frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i$

On a: $\frac{d-c}{a-b} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}{1+2i - (1-2i)} = \frac{-3}{4i} = \frac{3}{4}i$

donc $\boxed{\frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i}$

b) Montrons que $d-b = (c-a)e^{i\pi/2}$ puis déduisons $(DB) \perp (AC)$

On a $d-b = \frac{3(1+i)}{2} - (1-2i) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 1 + 2i = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

et: $(c-a)e^{i\pi/2} = \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i - 1 - 2i\right)i = \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right)i = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

donc: $\boxed{d-b = (c-a)e^{i\pi/2}}$

On a: $d-b = (c-a)e^{i\pi/2} \Rightarrow \frac{d-b}{c-a} = e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-b}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{AC}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc $\boxed{(DB) \perp (AC)}$

4) a) Vérifions que $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

On a $h(M) = M' \Leftrightarrow \vec{CM'} = \frac{2}{3}\vec{CM}$
 $\Leftrightarrow z' - c = \frac{2}{3}(z - c)$

$$\Leftrightarrow z' = c + \frac{2}{3}(z - c)$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}c$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{2}{3}z - (3 + i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}$$

b) Montrons que $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$

On a $h(P) = G \Leftrightarrow g = \frac{2}{3}p + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$

5) Montrons que Ω , G et D sont alignés

On a $\frac{d - w}{g - w} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{5}{2}}{\frac{13}{6} + \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}}$

$$= \frac{-1 + \frac{3}{2}i}{-\frac{2}{6} + \frac{1}{2}i} = \frac{1}{\frac{2}{6}} \cdot \frac{(-1 + \frac{3}{2}i)}{(-1 + \frac{3}{2}i)}$$

$$= \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{R}$$

donc $\frac{d - w}{g - w} \in \mathbb{R}$ d'où Ω , G et D sont alignés

Exercice 3

1 a) Montrons que $p(A) = \frac{2}{5}$

On tire simultanément 2 boules de l'urne donc chaque tirage est une combinaison de 2 éléments choisis parmi 6
 donc $\text{Card}(\Omega) = C_6^2 = 15$

6

ona $A : \{ \textcircled{1} \textcircled{1} \}$ donc $\text{Card}(A) = C_4^2 = 6$
 d'où $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

donc $p(A) = \frac{2}{5}$

b) Montrons que $p(B) = \frac{7}{15}$

ona $B : \{ \textcircled{B} \textcircled{B} \text{ ou } \textcircled{N} \textcircled{N} \}$ donc $\text{Card}(B) = C_4^2 + C_2^2 = 7$

donc $p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{7}{15}$

c) Les événements A, B sont-ils indépendants?

Calculons $p(A \cap B)$.

ona $A \cap B : \{ B_1 B_1 \}$ donc $\text{Card}(A \cap B) = C_3^2 = 3$

d'où $p(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

or $p(A) \times p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{14}{75}$ donc

$p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ d'où A et B ne sont pas indépendants.

e) a) Recopier et compléter le tableau

ona $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}, p(X=k) = C_n^k (p(A))^k (1-p(A))^{n-k}$

$p(X=1) = C_3^1 \times (p(A))^1 \times (1-p(A))^2 = \frac{54}{125}$

$p(X=2) = C_3^2 \times (p(A))^2 \times (1-p(A))^1 = \frac{36}{125}$

$p(X=3) = C_3^3 \times (p(A))^3 \times (1-p(A))^0 = \frac{8}{125}$

Comme $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = 1$

donc

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

b) Calculons $E(X)$.

Puisque $X \sim B(3, \frac{2}{5})$ (X suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{2}{5}$)
 ona $E(X) = n \cdot p(A) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

Méthode 2

$E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{6}{5}$

Problème

Partie I

النقطة الجزئية

7

1.a) Justifions graphiquement que $(\forall x > 0), g(x) - f(x) > 0$

Graphiquement la courbe (E_g) est au-dessus de la courbe (E_f) sur $]0, +\infty[$, d'où $(\forall x > 0), g(x) > f(x)$
C.à.d.

$$(\forall x > 0), g(x) - f(x) > 0$$

b) Déduisons que $(\forall x > 0), \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$

on a $(\forall x > 0), g(x) - f(x) > 0$ donc $(\forall x > 0), f(x) < g(x)$

et comme $(\forall x > 0), g(x) > 0$ d'où $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$

$$\text{C.à.d.} \quad (\forall x > 0), \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$$

2a) vérifions que $H: x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ puis déduisons $\int_1^e \ln x dx = 1 + e^2$

La fonction H est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$

$$H'(x) = (x \ln x - x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

C.à.d. $(\forall x > 0), H'(x) = \ln x$ donc H est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

$$\text{Déduisons} \quad \int_1^e \ln x dx = 1 + e^2$$

$$\text{on a:} \quad \int_1^e \ln x dx = \int_1^e H'(x) dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1) = e^2 + 1$$

b) En utilisant une I.p.p. montrons que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2$

$$\text{on pose:} \quad \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \ln x - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc:} \quad \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \left[\ln x (x \ln x - x) \right]_1^e - \int_1^e \ln x - 1 dx \\ &= 2(e^2 - e^2) - \left(\int_1^e \ln x dx - \int_1^e 1 dx \right) \\ &= 4e^2 - 2e^2 - (1 + e^2 - e^2 + 1) \\ &= 2e^2 - 2 \quad \text{donc} \quad \int_1^e (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2 \end{aligned}$$

تنبيه: يمنع على الترشح (ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته (ا)

c) Résolvons dans $]0, +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$

Soit $x > 0$, on a: $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - (\ln x)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x (2 - \ln x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^2$$

et comme $1 \in]0, +\infty[$ et $e^2 \in]0, +\infty[$ donc $S = \{1, e^2\}$

donc on déduit que $(\mathcal{E}_h) \cap (0, \infty) = \{A(1, 0), B(e^2, 0)\}$

d) soit $\mathcal{A}$ l'aire demandée, on a

$$\mathcal{A} = \left(\int_1^{e^2} |h(x)| dx \right) u_a$$

on a graphiquement $(\forall x \in [1, e^2]), h(x) \geq 0$ donc

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} |h(x)| dx &= \int_1^{e^2} h(x) dx = \int_1^{e^2} 2 \ln x - (\ln x)^2 dx \\ &= \int_1^{e^2} 2 \ln x dx - \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx \\ &= 2 \int_1^{e^2} \ln x dx - \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx \\ &= 2(1 + e^2) - (2e^2 - 2) \\ &= 2 + 2e^2 - 2e^2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{A} = 4 u_a$$

Partie II soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$
par: $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$

1 a) vérifions que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter

$$\begin{aligned} \text{on a: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - (\ln x)^2 \times \frac{1}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

تنبيه: يمنع على الترشح (ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته (ا)

9

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty & (\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$

Interprétation géométrique

La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b) Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ puis calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

on pose $t = \sqrt{x}$ donc $x = t^2$ ($x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$)
d'où

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln t)^2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \times \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

c) Déduisons que la droite $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{(\ln x)^2}{x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. Donc la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2.a) Montrons que : $(\forall x > 0), f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$
 $f'(x) = \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)' = 1 - \frac{2 \ln x \times \frac{1}{x} \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

donc : $(\forall x > 0), f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

10

b) Montrons que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

ona d'après le point I $(\forall x > 0), \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$

$$\text{donc } (\forall x > 0), 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} > 0 \quad \text{c-à-d:} \\ (\forall x > 0), f'(x) > 0$$

d'où f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

3a) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique
solution x dans $]0, +\infty[$

La fonction f est continue et strictement croissante
sur $]0, +\infty[$ donc $f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

et comme $0 \in \mathbb{R}$, d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une
solution unique x dans $]0, +\infty[$

Autrement dit :

$$(\exists ! x \in]0, +\infty[), f(x) = 0$$

b) Vérifions que $e^{-1} < x < 1$ et montrons que $\ln x = -x$

ona f est continue sur $[e^{-1}, 1]$ et comme $\begin{cases} f(e^{-1}) < 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$

donc $f(e^{-1}) \times f(1) < 0$ d'où d'après le T.V.I
 $e^{-1} < x < 1$

• montrons que $\ln x = -x$

ona :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow |\ln x| = \sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow -\ln x = x \quad (\text{car } x \in]e^{-1}, 1[\text{ et } \ln x < 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -x$$

c) Montrons que $(\forall x > 0), f(x) \leq x$

$$\text{Soit } x > 0, \text{ ona: } f(x) - x = x - \frac{(\ln x)^2}{x} - x = -\frac{(\ln x)^2}{x} \leq 0$$

$$\text{donc: } (\forall x > 0), f(x) \leq x$$

d) L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au
pt d'abscisse 1 est: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\text{or: } f'(1) = 1 \text{ et } f(1) = 1 \text{ donc } y = x$$

4) Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0,1]$
 C-a-d. $(\forall x \in]0,1])$, $\varphi(x) = f(x)$

a) Montrons que φ admet une fonction réciproque φ^{-1}
 définie sur un intervalle J (à déterminer)

La fonction φ est continue et strictement croissante
 sur $]0,1]$, donc elle admet une fonction
 réciproque φ^{-1} définie sur J tel que :

$$J = \varphi(]0,1]) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x), \varphi(1)] =]-\infty, 1]$$

b) Montrons que φ^{-1} est dérivable en 0 et $(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$

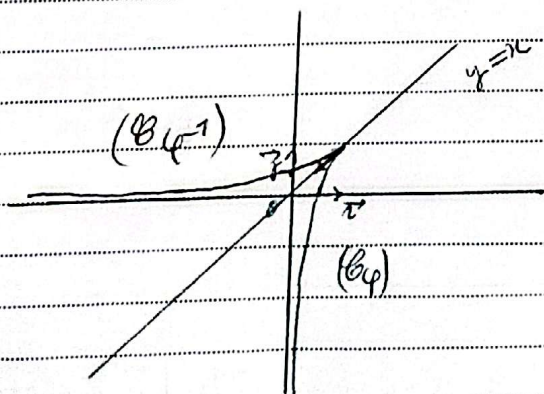
On a : $\varphi(\alpha) = 0$ donc : $\varphi^{-1}(0) = \alpha$ et comme la
 fonction φ est dérivable en α et $\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{2\ln \alpha}{\alpha^2}$

donc φ^{-1} est dérivable en 0.

$$\begin{aligned} \text{On a } (\varphi^{-1})'(0) &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))} = \frac{1}{\varphi'(\alpha)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2\ln \alpha}{\alpha^2}} \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 2\ln \alpha + (\ln \alpha)^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 2\ln \alpha + (\ln \alpha)^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha + \alpha^2} \quad (\ln \alpha = -\alpha) \\ &= \frac{\alpha^2}{2\alpha + 2\alpha^2} = \frac{\alpha}{2+2\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2+2\alpha}}$$

c) Construction des courbes $(\mathcal{C}_\varphi)$ et $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$



Partie III Soit (u_n) la suite numérique définie par

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 1$

• Pour $n=0$, on a $u_0 = e$ et comme $e > 1$ donc

la proposition est vraie pour $n=0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 1$ et on montre que

$$\text{on a } u_n > 1 \Rightarrow f(u_n) > f(1) \Rightarrow u_{n+1} > 1$$

• D'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

2.a) Montrons que (u_n) est décroissante

$$\text{on a } (\forall x \in]0, +\infty[), f(x) \leq x \quad \text{et comme } (\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 1$$

$$\text{c-à-d } u_n \in]1, +\infty[\subset]0, +\infty[\quad \text{donc } (\forall n \in \mathbb{N}), f(u_n) \leq u_n$$

$$\text{c-à-d } (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$$

d'où la suite (u_n) est décroissante

b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente

c) Déterminons $\lim u_n$

On a :

• La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$

• On a $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [1, +\infty[$

• La suite (u_n) est CV et sa limite l vérifie $l \geq 1$

Donc la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1, +\infty[$

or 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1, +\infty[$ D'où :

$$\boxed{\lim u_n = 1}$$

Pr : Yahya MATIOU