CORRECTION D'EXAMEN BLANC 2024

Yahya MATIOUI

20 juin 2024

www.etude-generale.com

Exercice 1. On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$.

1. Vérifions que les points A, B et C déterminent un plan (ABC) :
   On a $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ et comme $\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{1}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, par suite les points A, B et C ne sont pas alignés donc les points A, B et C déterminent un plan (ABC) .
2. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{n}(1,1,1)$ est normal au plan (ABC) et que : $x+y+z-1=0$ son équation
   on a $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = -1+1+0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = -1+1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$, ceci signifie que $\overrightarrow{n}(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
   Donc une équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit sous la forme
   $$x+y+z+d=0.$$
   or $A(1,0,0) \in (ABC) \Leftrightarrow 1+0+0+d=0 \Leftrightarrow d=-1$ donc $\boxed{(ABC) : x+y+z-1=0}$
3. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient $MO^2+MA^2+MB^2+MC^2=5$
   (a) Montrons que : $MO^2+MA^2+MB^2+MC^2=5 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0$
   On a
   $$\begin{aligned} MO^2+MA^2+MB^2+MC^2=5 &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+(1-x)^2+y^2+z^2 \\ &\quad +x^2+(1-y)^2+z^2+x^2+y^2+(1-z)^2=5 \\ &\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-2x-2y-2z-2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{MO^2+MA^2+MB^2+MC^2=5 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0.}$

(b) Déduisons que (S) est une sphère de centre le point $\Omega\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{11}}{4}$

On a $a=\frac{-1}{2}$, $b=\frac{-1}{2}$, $c=\frac{-1}{2}$ et $d=\frac{-1}{2}$ alors

$$a^2+b^2+c^2-4d=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2=\frac{11}{4}>0$$

donc $\boxed{(S) \text{ est une sphère de centre le point } \Omega\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \text{ et de rayon } R=\frac{\sqrt{\frac{11}{4}}}{2}=\ldots}$

(c) Calculons $d(\Omega,(ABC))$, puis déduisons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ)

On a $d(\Omega,(ABC))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega-1|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|\frac{-1}{4}\right|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$

et comme $R=\frac{\sqrt{11}}{4}$ alors $d(\Omega,(ABC))<R$, ainsi le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ) .

Montrons que le rayon du cercle (Γ) est $\sqrt{\frac{2}{3}}$:

On a $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{11}{16}-\frac{3}{144}}=\sqrt{\frac{96}{144}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

donc le rayon du cercle (Γ) est $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Montrons que $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est le centre du cercle (Γ)

Soit le point $H(x_H,y_H,z_H)$ le centre de (Γ).

On a H est le point d'intersection de la droite (Δ) qui passe par Ω est orthogonale au plan (ABC).

Déterminons une représentation paramétrique de (Δ) :

On a (Δ) passe par Ω est orthogonale au plan (ABC) donc (Δ)est dirigée par un vecteur normal à (ABC).

Soit $\overrightarrow{n}(1,1,1)$ un vecteur normal à (ABC) . Donc une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} + t \\ y = \dfrac{1}{4} + t \\ z = \dfrac{1}{4} + t \end{cases} \quad /(t \in \mathbb{R})$.

On a

$$H\left(x_H, y_H, z_H\right) \in (ABC) \cap (\Delta) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}), \begin{cases} x_H = \dfrac{1}{4} + t \\ y_H = \dfrac{1}{4} + t \\ z_H = \dfrac{1}{4} + t \\ x_H + y_H + z_H - 1 = 0 \end{cases}$$

donc

$$\left(\frac{1}{4} + t\right) + \left(\frac{1}{4} + t\right) + \left(\frac{1}{4} + t\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t + \frac{3}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{12}$$

donc $\begin{cases} t = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} \\ t = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} \\ t = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} \end{cases}$ par suite $H\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Donc (Γ) est le cercle de centre $H\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, et de rayon $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 2. .

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
   On a $\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 telles que :
   $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} + i$. Donc
   $$S = \left\{\sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i\right\}$$

2. On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que : $a = 2$, $b = \sqrt{3} + i$ et $c = a + b$

   (a) Montrons que : $|c| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
   On a $c = a + b = 2 + \sqrt{3} + i$ donc

$$\begin{aligned}|c| &= \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}\\ &= \sqrt{4+4\sqrt{3}+4}\\ &= \sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)}\\ &= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\end{aligned}$$

donc $\boxed{c = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

(b) Écriture trigonométrique du nombre complexe b

On a $|b| = \sqrt{3+1} = 2$ donc $b = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+isin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

Déduisons que : $c = 2\left(1+cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+isin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

On a $c = a+b = 2+2\left(cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+isin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(1+cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+isin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

(c) Déduisons que : $arg\left(c\right) \equiv \dfrac{\pi}{12}\left[2\pi\right]$

Méthode 1

On a

$$\begin{aligned}c &= a+b\\ &= 2\left(1+cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2\left(2cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+2isin\left(\frac{\pi}{12}\right).cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ &= 4cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\end{aligned}$$

or $0 < \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0$ donc ceci signifie que $\boxed{arg\left(c\right) \equiv \dfrac{\pi}{12}\left[2\pi\right]}$

Méthode 2

On a

$$\begin{aligned}
c &= 2\left(1+cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2\left(e^{i0}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\\
&= 2e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)\\
&= 4cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\times e^{i\frac{\pi}{12}}
\end{aligned}$$

or $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$ donc $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ donc ceci signifie que $\boxed{arg\left(c\right)\equiv\frac{\pi}{12}\left[2\pi\right]}$

(d) Déterminons l'image du point B par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{6}$

On a

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\pi}{6}}\left(b-c\right)+c &= -ae^{i\frac{\pi}{6}}+c\\
&= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+2+\sqrt{3}+i\\
&= -\sqrt{3}-i+2+\sqrt{3}+i\\
&= 2\\
&= a
\end{aligned}$$

donc $a=e^{i\frac{\pi}{6}}\left(b-c\right)+c$ c'est-à-dire $a-c=e^{i\frac{\pi}{6}}\left(b-c\right)$ donc A est l'image du point B par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

(e) Déduisons que $OBCA$ est un losange

On a $c=a+b$ c'est-à-dire $c-b=a$ donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$ d'ou $OBCA$ est un parallélogramme.

D'autre part on a $R\left(B\right)=A$ c-est-à-dire $\begin{cases} CB=CA\\ \left(\overline{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\left[2\pi\right]\end{cases}$

On déduit que $OBCA$ est un parallélogramme et $CB=CA$ ceci signifie que $OBCA$ est un losange.

Exercice 3. .

1. <u>Montrons que</u> : $p\left(A\right)=\dfrac{1}{21}$
   On tire simultanément et au hasard 4 boules de l'urne qui contient 9 boules, donc $card\left(\Omega\right)=C_9^4=126$
   On a A : « les quatre boules tirées sont de la même couleur »
   c'est-à-dire $A:\left\{RRRR\ ou\ VVVV\right\}$ donc
$$p\left(A\right)=\frac{card\left(A\right)}{card\left(\Omega\right)}=\frac{C_5^4+C_4^4}{126}=\frac{6}{126}=\frac{1}{21}$$
2. <u>Montrons que</u> $p\left(B\right)=\dfrac{9}{14}$
   On a B : « Obtenir au moins deux boules vertes »
   c'est-à-dire $B:\left\{VVRR\ ou\ VVVR\ ou\ VVVV\right\}$ donc
$$p\left(B\right)=\frac{card\left(B\right)}{card\left(\Omega\right)}=\frac{C_4^2\times C_5^2+C_4\times C_5^1+C_4^4}{126}=\frac{9}{14}$$
3. <u>Calculons</u> $p\left(A\cap B\right)$
   On a $A\cap B:\left\{VVVV\right\}$ donc $p\left(A\cap B\right)=\dfrac{card\left(A\cap B\right)}{card\left(\Omega\right)}=\dfrac{1}{126}$
4. <u>Montrons que la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes, sachant que le tirage des quatre boules sont de la même est $\frac{1}{6}$</u>
   On a : $p_A\left(B\right)=\dfrac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(A\right)}=\dfrac{\frac{1}{126}}{\frac{1}{21}}=\dfrac{1}{126}\times 21=\dfrac{1}{6}$.
5. On peut schématiser cette expérience par un arbre

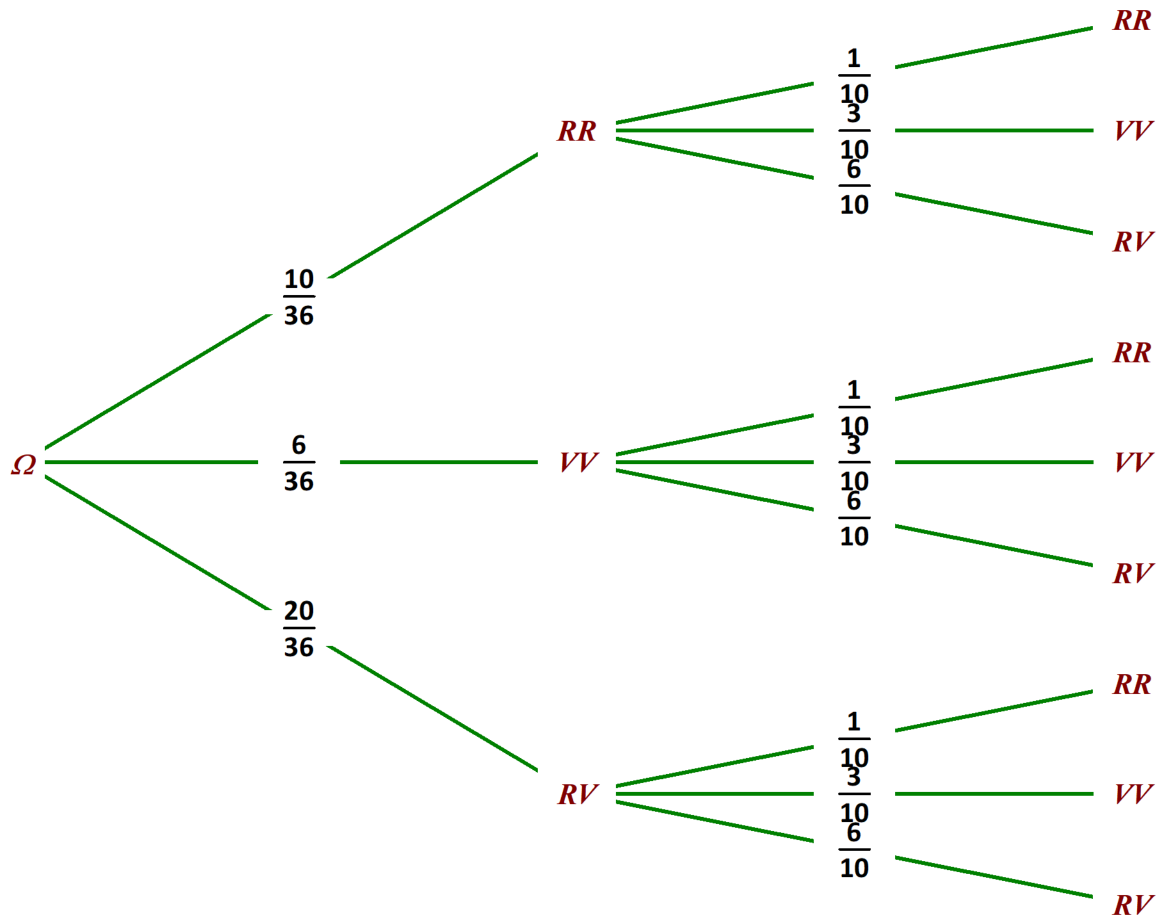


FIGURE 1 –

Réaliser l'événement C c'est tirer : $\{RRVV \ ou \ VVRR \ ou \ RVRV\}$ donc

$$p(C) = \frac{10}{36} \times \frac{3}{10} + \frac{6}{36} \times \frac{1}{10} + \frac{20}{36} \times \frac{6}{10} = \frac{13}{30}$$

Problème 1. .

I) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{-x+1} + \dfrac{1}{x} - 2$

1. <u>Calculons</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$:

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -x+1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \left(\begin{array}{c} X = -x+1 \\ x \to +\infty \Rightarrow X \to -\infty \end{array} \right)$

   et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} - 2 = -2$

   par suite $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -2}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x+1} - 2 = e - 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x+1} + \dfrac{1}{x} - 2 = +\infty$ par suite

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty}$

2. Calculons $g'(x)$ pour tout $x > 0$, puis déduisons que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$g'(x) = \left(e^{-x+1} + \frac{1}{x} - 2\right)' = -e^{-x+1} - \frac{1}{x^2} = -\left(e^{-x+1} + \frac{1}{x^2}\right)$$

donc $(\forall x > 0), g'(x) = -\left(e^{-x+1} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

On a $e^{-x+1} + \dfrac{1}{x^2} > 0$ pour tout $x > 0$ donc $(\forall x > 0), g'(x) < 0$. Par suite la fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. Calculons $g(1)$, puis déduisons que $\begin{cases} g(x) \leq 0 \ si & x \geq 1 \\ g(x) > 0 \ si & 0 < x < 1 \end{cases}$

On a $g(1) = e^{-1+1} + 1 - 2 = 0$.
La fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc
$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1) \Rightarrow g(x) \leq 0$, donc $(\forall x \geq 1), g(x) \leq 0$.

$0 < x < 1 \Rightarrow g(x) > g(1) \Rightarrow g(x) > 0$, donc $(\forall x \in]0, 1[), g(x) > 0$.

Conclusion : $\boxed{\begin{cases} (\forall x \geq 1), g(x) \leq 0 \\ (\forall x \in]0, 1[), g(x) > 0 \end{cases}}$

II) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 - x)e^{-x+1} - x^2 + 5x - 3 - 2lnx$

1. Montrons que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, puis interprétons géométriquement le résultat

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} (1 - x)e^{-x+1} = e \\ \lim\limits_{x\to 0^+} - x^2 + 5x - 3 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} - 2lnx = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

$\boxed{\text{La courbe } (C_f) \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

2. .

(a) Montrons que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - x)e^{-x+1} = \lim\limits_{X\to -\infty} Xe^X = 0$.

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+5x-3-2lnx = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}-2\frac{lnx}{x^2}\right) = -\infty$,
donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

(b) Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, puis interprétons géométriquement le résultat

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}-1\right)e^{-x+1} - x + 5 - \frac{3}{x} - 2\frac{lnx}{x}$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}-1\right)e^{-x+1} = 0$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\frac{lnx}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+5-\frac{3}{x} = -\infty$ par suite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}-1\right)e^{-x+1} - x + 5 - \frac{3}{x} - 2\frac{lnx}{x} = -\infty$$

c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$.

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au

3. On pose $h(x) = f(x) - x$

(a) Montrons que 1 est la seule solution de l'équation $h(x) = 0$

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc $h(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$ et comme $0 \in \mathbb{R}$ par suite l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution dans $]0,+\infty[$.

Or $h(1) = f(1) - 1 = 0$, donc 1 est la seule solution de l'équation $h(x) = 0$.

(b) Déduisons la position relative de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$

La fonction h est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $h(1) = 0$, donc $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow f(x) - x < 0$, d'ou

$$(\forall x > 1), f(x) < x$$

la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (Δ) sur $]1,+\infty[$

$0 < x < 1 \Rightarrow h(x) > h(1) \Rightarrow h(x) > 0 \Rightarrow f(x) - x > 0$ d'ou

$$(\forall x \in]0,1[), f(x) > x$$

la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (Δ) sur $]0,1[$.

$(C_f) \cap (\Delta) = \{A(1,1)\}$

4. .

(a) Montrons que $f'(x) = (x-2)\,g(x)$ pour tout $x > 0$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$ on a

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -e^{-x+1} + (1-x) \times \left(-e^{-x+1}\right) - 2x + 5 - \frac{2}{x} \\
&= -2e^{-x+1} + xe^{-x+1} - 2x + 5 - \frac{2}{x} \\
&= -2e^{-x+1} + 4 + x\left(e^{-x+1} - 2\right) + 1 - \frac{2}{x} \\
&= -2\left(e^{-x+1} - 2\right) + x\left(e^{-x+1} - 2\right) + \frac{x-2}{x} \\
&= \left(e^{-x+1} - 2\right)(x-2) + \frac{x-2}{x} \\
&= (x-2)\left(e^{-x+1} - 2 + \frac{1}{x}\right) \\
&= (x-2)\,g(x)
\end{aligned}
$$

donc $\boxed{(\forall x > 0),\ f'(x) = (x-2)\,g(x)}$

(b) Le tableau de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$

D'après la partie 1, on déduite le tableau de signe suivant

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Figure 2 –

donc

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{-1}{e}+3-2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

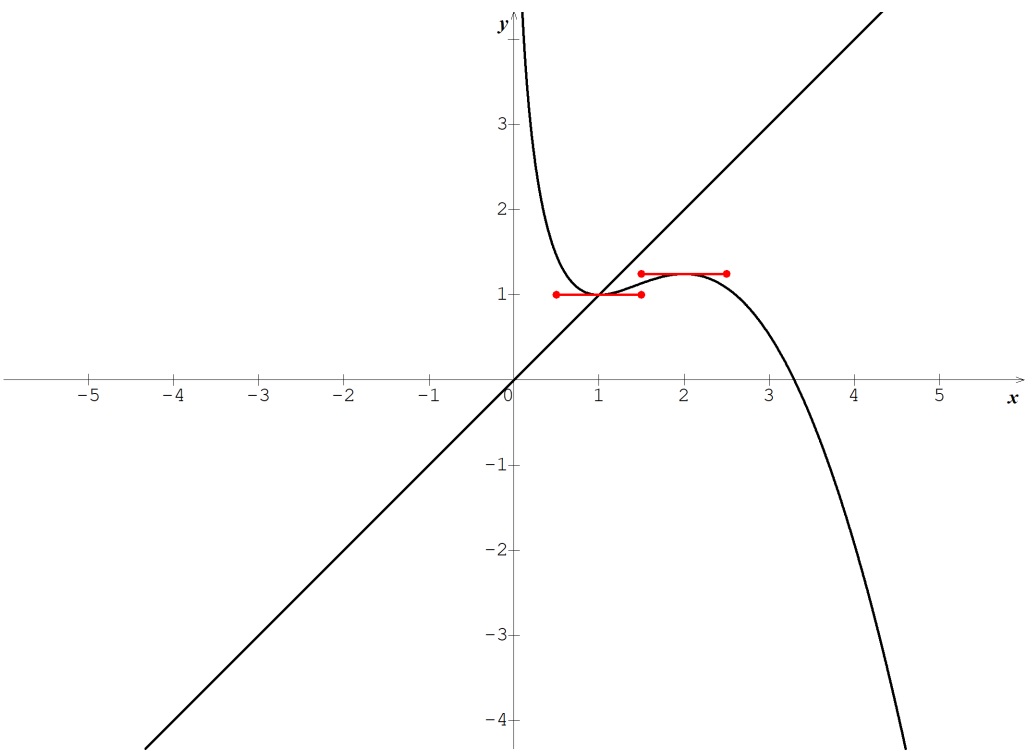
Figure 3 –

(c) Montrons que $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$:
*Sur l'intervalle $]0,2[$ la fonction f admet 1 comme minimum en 1 donc $(\forall x\in]0,2[)\,, f(x)>1$ et puisque $1>0$ donc

$$(\forall x\in]0,2[)\,, f(x)>0.$$

Par suite l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $]0,2[$.
*La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.
Donc $f([2,+\infty[)=]-\infty,f(2)]$ et puisque $0\in]-\infty,f(2)]$,
alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2,+\infty[$.
Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.
Montrons que : $3,2<\alpha<3,4$
La fonction f est continue sur $[3,2;3,4]$ et comme $f(3,2)\times f(3,4)<0$ donc d'après T.V.I on déduit que : $\boxed{3,2<\alpha<3,4}$.

5. On construit la droite (Δ) et la courbe (C_f) :



III)

1. En utilisant une intégration par parties, montrons que : $\int_1^2 2ln(x)dx=4ln(2)-2$ et $\int_1^2(1-x)\,e^{-x+1}dx=2e^{-1}-1$

On a $\int_1^2 2ln(x)dx = 2\int_1^2 lnxdx$

on pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = lnx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc

$$\int_1^2 2lnxdx = 2\left([xlnx]_1^2 - \int\limits_1^2 1dx \right) = 2\left(2ln2 - [x]_1^2\right) = 4ln(2) - 2$$

On pose $\begin{cases} u(x) = 1 - x \\ v'(x) = e^{-x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = -e^{-x+1} \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned} \int\limits_1^2 (1-x)\, e^{-x+1} dx &= \left[(x-1)e^{-x+1}\right]_1^2 - \int\limits_1^2 e^{-x+1} dx \\ &= e^{-1} - \left[-e^{-x+1}\right]_1^2 \\ &= e^{-1} - \left(-e^{-1} + e^0\right) \\ &= e^{-1} + e^{-1} - 1 \\ &= 2e^{-1} - 1 \end{aligned}$$

2. Déduisons en cm^2 l'aire de la surface délimitée par (C_f), les droites (Δ) , $x = 1$ et $x = 2$

   On a $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x) - x|\, dx \times ua$

   or comme $(\forall x \in [1, 2])$, $f(x) - x \leq 0$ donc $|f(x) - x| = x - f(x)$par suite

$$\int_1^2 |f(x)-x|\,dx = \int_1^2 x - f(x)\,dx$$
$$= \int_1^2 x - \left((1-x)e^{-x+1} - x^2 + 5x - 3 - 2lnx\right)dx$$
$$= \int_1^2 -(1-x)e^{-x+1} + x^2 - 4x + 3 + 2lnxdx$$
$$= -\int_1^2 (1-x)e^{-x+1}dx + \int_1^2 x^2 - 4x + 3dx + \int_1^2 2lnxdx$$
$$= 1 - 2e^{-1} + \left[\frac{x}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^2 + 4ln(2) - 2$$
$$= 1 - 2e^{-1} + \left(\frac{8}{3} - 8 + 6 - \frac{1}{3} + 2 - 3\right) + 4ln(2) - 2$$
$$= -4 - 2e^{-1} + \frac{7}{3} + 4ln(2)$$

et comme $ua = 4cm^2$ donc $\boxed{\mathcal{A} = 4\left(-4 - 2e^{-1} + \frac{7}{3} + 4ln(2)\right)cm^2}$

IV On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = ln(3)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrons que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   Pour $n = 0$, on a $u_0 = ln(3)$ et comme $1 \leq u_0 \leq 2$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ et on montre que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
   On a la fonction f est strictement croissante sur $[1, 2]$ donc
   $$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq -e^{-1} + 3 - 2ln2$$
   et comme $-e^{-1} + 3 - 2ln2 \leq 2$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
   D'après le principe de la récurrence on déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2}$
2. Déterminons la monotonie de la suite (u_n)
   On a $(\forall x \in [1, 2])\,, f(x) \leq x$ (d'après la question $3 - b$)
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1, 2]$ d'ou $f(u_n) \leq u_n$ c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ceci signifie que la suite (u_n) est décroissante.
   Déduisons la convergence de la suite (u_n)

   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge.

3. <u>Calculons</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

La fonction f est continue sur $[1,2]$ et $f([1,2]) \subset [1,2]$

et la suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 \in [1,2] \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

et comme la suite (u_n) est convergente donc sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1,2]$.

Soit $x \in [1,2]$, on a

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$$

or 1 est la seule solution de l'équation $h(x) = 0$, ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$