ثانوية سيدي عبد الرحمان التأهيلية	- الامتحان التجريبي-	دورة ماي 2024
- الموضوع-	مادة الرياضيات - شعبة العلوم التجريبية- المعامل 7-	مدة الإنجاز: ثلاث ساعات

Exercice n°1 (3pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$

0.25 1) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan (ABC)

0.75 2) Montrer que le vecteur $\vec{n}(1;1;1)$ est normal au plan (ABC) et que : $x+y+z-1=0$ est son équation

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient la relation : $MO^2+MA^2+MB^2+MC^2=5$

0.75 a) Montrer que : $MO^2+MA^2+MB^2+MC^2=5 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0$

0.5 b) En déduire que(S) est une sphère de centre le point $\Omega\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{11}}{4}$

0.75 c) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis déduire que le plan(ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle Γ puis montrer que son rayon est $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et son centre est le point $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Exercice n°2 (3 pts)

0.5 1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

2) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que : $a=2$, $b=\sqrt{3}+i$, et $c=a+b$

0.25 a) Montrer que : $|c|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

0.75 b) Ecrire b sous la forme trigonométrique et déduire que : $c=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

0.75 c) Déduire que $\arg(c)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$ (remarquer que $1+\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin(\theta)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

0.5 d) Déterminer l'image du point B par la rotation R de centre le point C et d'angle $\frac{\pi}{6}$

0.25 e) Déduire que OBCA est un losange

Exercice n°3 (3pts)

Une urne U_1 contient cinq boules rouges et quatre boules vertes, une autre urne U_2 contient deux boules rouges et trois boules vertes (toutes les boules sont indiscernables au toucher)

I) On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire simultanément et au hasard 4 boules de U_1

0.5 1) Montrer que la probabilité de l'événement A: « les quatre boules tirées sont de la même couleur » est : $\frac{1}{21}$

0.5 2) Montrer que la probabilité de l'événement B: « obtenir au moins deux boules vertes » est : $\frac{9}{14}$

0.75 3) Calculer $p(A \cap B)$

0.5 4) Après le tirage des quatre boules il s'est avéré qu'elles sont de la même couleur, montrer que la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes est : $\frac{1}{6}$

II) Maintenant on considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard et simultanément deux boules de U_1 puis on tire au hasard et simultanément deux boules de U_2

0.75 Montrer que la probabilité de l'événement C: « parmi les quatre boules tirées il ya deux boules rouges et deux boules vertes » est : $\frac{13}{30}$

Problème (11pts)

Partie 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = e^{-x+1} + \frac{1}{x} - 2$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \succ 0$ puis déduire que la fonction g est strictement décroissante sur

0.5 $]0;+\infty[$

0.75 3) Calculer $g(1)$ et déduire que : $g(x) \leq 0$ si $x \geq 1$ et $g(x) \succ 0$ si $0 \prec x \prec 1$

0.5 **Partie 2 :**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1-x)e^{-x+1} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm)

1) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.75 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

0.5 b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.75 3) On pose $h(x) = f(x) - x$ et on donne le tableau de variations de h

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

a) à partir du tableau de variations de h , montrer que 1 est la seule solution de l'équation :

0.5 $h(x) = 0$

0.5 b) Déduire la position relative de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta): y = x$

0.75 4) a) Montrer que $f'(x)=(x-2)g(x)$ pour tout $x \succ 0$

0.75 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$

0.5 c) Montrer que : $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$ et que $3,2 \prec \alpha \prec 3,4$

1 5) Construire la droite (Δ) et la courbe (C_f) (on prend $f(2)\approx 1,3$)

Partie 3 :

1 1) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^2 2\ln(x)dx = 4\ln(2)-2$ et $\int_1^2 (1-x)e^{-x+1}dx = 2e^{-1}-1$

0.5 2) En déduire en cm² l'aire de la surface délimitée par (C_f) , les droites (Δ) , $x=1$ et $x=2$

Partie 4 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0=\ln(3)$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout n de IN

0.75 1) Montrer que : $1\le U_n\le 2$ pour tout n de IN

0.5 2) Déterminer la monotonie de (U_n) En déduire que (U_n) est convergente

0.5 3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

تذكر دائما المقولة الشهيرة التالية:

إننا ننسى بسرعة ما يلقن لنا و لكننا لا ننسى أبدا ما نجده بأنفسنا

و الله ولي التوفيق