Les suites numériques

1 BAC
L

Yahya MATIOUI

26 août 2023

www.etude-generale.com

1 Les suites numériques

1.1 Définition et Notation

Définition 1. Une suite numérique u est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ ou une de ses parties. à la variable entière n, on associe le nombre $u(n)$ appelé terme de rang n de la suite u. On a donc $u : n \mapsto u(n)$. On note souvent u_n le terme de rang n ou le terme général de la suite u.

Notation :

— Lorsque la suite u est définie sur $\mathbb{N}$, u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n).

— Lorsque la suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$, u se note $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exemple 1. .

1. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2n+3$
   Calculer u_0,u_1,u_2 et u_3, puis déterminons le 1er terme.
2. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$
   Calculer u_1,u_2,u_7 et u_{12}.
3. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$
   Calculer u_1,u_2,u_7 et u_{12}.

2 Les suites arithmétiques

Définition d'une suite arithmétique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}),\, u_{n+1} - u_n = r}$

Exemple 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3n + 5$.

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) + 5 - (3n+5) \\ &= 3n + 3 + 5 - 3n - 5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

alors $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = 3$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

Exemple 3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son 1er terme dans chacun des cas suivants :

1. $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 5n + 2$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = n + 3$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{1}{2}n + 4$

Le terme général d'une suite arithmétique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$,on a

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr \\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p + (n-p)r \end{array}}$$

Exemple 4. .

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et $u_6 = 31$. Calculer u_{2018}.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $u_0 = 5$. Déterminons u_n en fonction de n.

— On a : $u_{2018} = u_6 + (2018 - 6) \times \dfrac{1}{2} = 31 + 1006$ donc $u_{2018} = 1037$.

— On a $r = \dfrac{-1}{2}$ et $u_0 = 5$ donc $u_n = u_0 + nr = 5 - \dfrac{1}{2}n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r tel que $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Déterminons r .

On a : $u_{100} = u_0 + 100r = 5 + 100r$. Donc $100r = u_{100} - 5 = -50$ par suite $r = \dfrac{-1}{2}$.

Exemple 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique de raison $r = 6$ et de 1er terme $u_1 = 2$. Déterminer u_n en fonction de n.

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, on a : $\boxed{u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \dfrac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}}$

Exemple 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 + 5n$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)(n+1) \\ &= \left(\frac{3+3+5n}{2}\right)(n+1) \\ &= \left(\frac{6+5n}{2}\right)(n+1) \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), S = \dfrac{(6+5n)(n+1)}{2}$.

Exemple 8. .

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$la suite arithmétique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = n + 1$.
   Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$la suite arithmétique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 2n + 3$.
   Calculer la somme $S' = u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = -3n + \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme.
2. Écrire u_n en fonction de n.
3. Calculer u_3, u_5et u_{15}.
4. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_{15}$.

3 Les suites géométriques

Définition d'une suite géométrique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = q \times u_n}$

Exemple 9. .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 \times 2^n$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times 2^{n+1} \\ &= 3 \times 2^n \times 2 \\ &= 2 \times 3 \times 2^n \\ &= 2 \times u_n \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 2 \times u_n$. Par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

Exemple 10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dans chacun des cas suivants :

1. $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3^n$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 2 \times 7^n$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 5 \times 2^{n+2}$.

Le terme général d'une suite géométrique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q tel que $(q \neq 0)$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} (\forall n \in \mathbb{N}), u_n = u_0 \times q^n \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_n = u_p \times q^{n-p} \end{array}}$$

Exemple 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$.

1. Calculer u_1, u_5 et u_6.
2. Écrire u_n en fonction de n.

— On a :

$$u_1 = u_0 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$$

$$u_5 = u_0 \times 3^5 = 2 \times 3^5 = 486$$

$$u_6 = u_0 \times 3^6 = 2 \times 3^6 = 1458$$

— On a $q = 3$ et $u_0 = 2$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 2 + 3n$.

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ on a :

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

Exemple 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= u_0 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 3 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= -3\left(1-2^{n+1}\right) \\ &= 3\left(2^{n+1}-1\right) \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), S = 3\left(2^{n+1}-1\right)$.

Exemple 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $u_0 = 1$.

Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q positif tel que $u_0 = 1$ et $u_2 = 4$.

1. Déterminer q.
2. Écrire $u_n$en fonction de n.
3. Calculer u_5 et u_7.
4. Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

FIN