Généralités sur les fonctions numériques

1 BAC L

Yahya MATIOUI

24 août 2023

www.etude-generale.com

1 Rappel

1.1 Définition générale d'une fonction

Définition 1. On appelle fonction f la donnée d'un ensemble E, d'un ensemble F et d'un procédé qui permet d'associer à un élément x de E au plus un élément $y = f(x)$ de F. Cet élément y, quand il existe, est l'image de x, et x est appelé un antécédent de y. On appelle E l'ensemble de départ de f, F l'ensemble d'arrivée de f.

Remarque 1. Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un élément.

1.2 L'ensemble de définition d'une fonction

Définition 2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x.

L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des nombres réels x qui possèdent une image par cette fonction. L'ensemble de définition de la fonction f est noté : D_f tel que : $\boxed{D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}}$

Exemple 1. Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x + 1 \ , \quad f(x) = x^2 + 2x \quad , \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad , \quad f(x) = \quad x^3 + 5x^2 - 4x$$

2 Fonction paire - Fonction impaire

Définition 3. On considère une fonction f définie sur un ensemble I.

1. On dit que la fonction f est paire si, pour tout $x \in I$, on a $\boxed{\begin{cases} -x \in I \\ \\ f(-x) = f(x) \end{cases}}$.

2. On dit que la fonction f est impaire si, pour tout $x \in I$, on a $\boxed{\begin{cases} -x \in I \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}}$.

Exemple 2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ est paire.

Exemple 3. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x$ est impaire.

Proposition 1. .

1. *Si une fonction est paire alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour sa représentation graphique.*
2. *Si une fonction est impaire alors l'origine du repère est un centre de symétrie pour sa représentation graphique.*

3 Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

Définition 4. .

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
Soient M et m deux nombres réels.

1. On dit que f est majorée sur I par M si : $\boxed{\forall x \in I,\ f(x) \leq M}$
2. On dit que f est minorée sur I par m si : $\boxed{\forall x \in I,\ f(x) \geq m}$
3. On dit que f est bornée sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I, c'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in I,\ m \leq f(x) \leq M}$

Exemple 4. .

Montrons que $f(x) = x^2 + 1$ est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - 1 = x^2 + 1 - 1 = x^2 \geq 0$
donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) \geq 1$$

par suite la fonction f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5. .

Montrons que $f(x) = -2x^2 + 4$ est majorée par 4 sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,on a : $f(x) - 4 = -2x^2 + 4 - 4 = -2x^2 \leq 0$
donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) \leq 4$$

par suite la fonction f est majorée par 4 sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6. .

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x + 3$.
   (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = (x+1)^2 + 2$.
   (b) Montrer que f est minorée par 2.
2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 4x + 7$.
   (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), g(x) = -2(x-1)^2 + 9$.
   (b) Montrer que f est majorée par 9.

4 Comparaisons de deux fonctions

4.1 Égalité de deux fonctions

Définition 5. Deux fonctions f et g sont dites égales si :

1. Elles sont le même ensemble de définition D.
2. $(\forall x \in D), f(x) = g(x)$.

Exemple 7. :

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x-7}$ et la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x-14}{x-7}$. On a

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \backslash \{7\}.$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{7\}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - \frac{x}{x-7} \\ &= \frac{2(x-7)}{x-7} - \frac{x}{x-7} \\ &= \frac{2x-14-x}{x-7} \\ &= \frac{x-14}{x-7} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

   donc les fonctions f et g sont égales.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ et la fonction g définie par : $g(x) = x - 1$. On a $D_g = \mathbb{R}$ (car g est une fonction polynôme) et $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Ainsi
$$D_f \neq D_g$$
donc $f \neq g$.

Exemple 8. Montrer que f et g sont égales : $\begin{cases} f(x) = (x+2)^2 + 5 \\ \\ g(x) = x^2 + 4x + 9 \end{cases}$

4.2 Inégalité de deux fonctions

Définition 6. .
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que f est supérieurs ou égale à g sur I si : $\boxed{(\forall x \in I), f(x) \geq g(x)}$
et on écrit $f \geq g$.

Interprétation géométrique

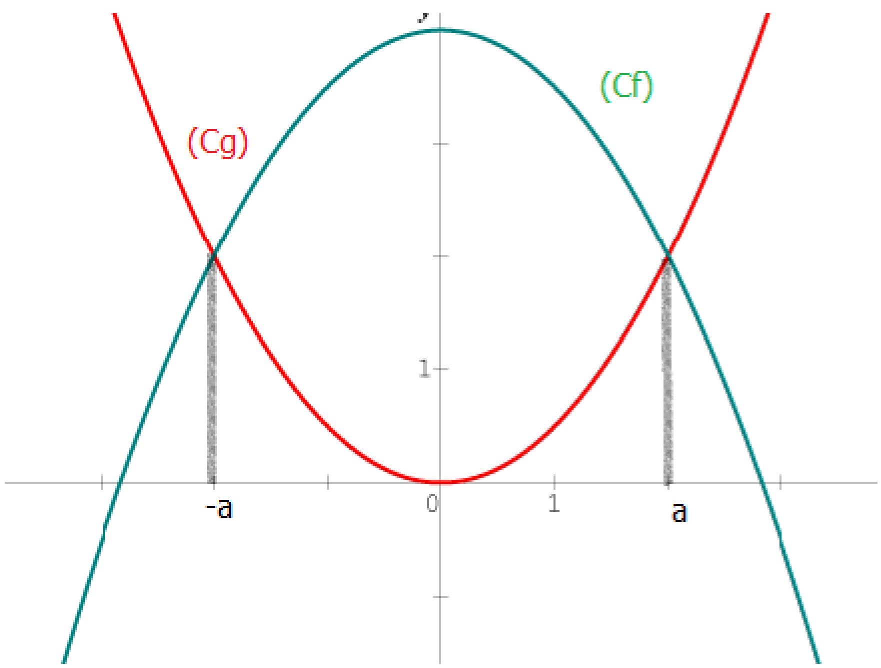

FIGURE 1 –

1. Sur l'intervalle $]-\infty, -a]$: (C_f) se trouve an-dessous de (C_g) donc $f \leq g$.
2. Sur l'intervalle $[-a, a]$: (C_f) se trouve au-dessus de (C_g) donc $f \geq g$.
3. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$: (C_g) se trouve an-dessus de (C_f) donc $f \leq g$.

Exemple 9. On considère les fonctions f et g telles que :

$$f(x) = x^2 \quad , g(x) = 2x - 1$$

5 Monotonie d'une fonction numérique

5.1 Définition et exemple

Définition 7. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I :

1. On dit que f est croissante sur I si : $\boxed{\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)}$
2. On dit que f est strictement croissante sur I si : $\boxed{\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)}$
3. On dit que f est décroissante sur I si : $\boxed{\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)}$
4. On dit que f est strictement décroissante sur I si : $\boxed{\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)}$
5. On dit que f est constante sur I si : $\boxed{\forall x, y \in I,\ f(x) = f(y)}$
6. La fonction f est dite monotone sur I si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur I.
7. La fonction f est dite strictement monotone sur I si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Remarque 2. Pour montrer la monotonie d'une fonction sur I, on prendra deux réels $a, b \in I$ tel que $a < b$ et l'on étudiera le signe de $f(a) - f(b)$. Si le signe est positif la fonction est décroissante, si le signe est négatif la fonction est croissante.

Exemple 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$.

Étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.

— Soit a et b deux éléments de $[0, +\infty[$ tels que : $a < b$. On a

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 + 1 - \left(b^2 + 1\right) \\ &= a^2 + 1 - b^2 - 1 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

on a : $a < b$ et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ alors $a^2 < b^2$ par suite $a^2 - b^2 < 0$ c'est-à-dire $f(a) - f(b) < 0$, d'ou la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

— Soit a et b deux éléments de $]-\infty, 0]$ tels que : $a < b$. On a

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2$$

on a : $a < b$ et comme la fonction $x \mapsto x^2$est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ alors $a^2 > b^2$ par suite $a^2 - b^2 > 0$ c'est-à-dire $f(a) - f(b) > 0$, d'ou la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Remarque 3. .

1. Pour résumer les variations dune fonction sur son domaine de définition on dresse un tableau de variation
2. Une flèche montante indiquant la croissance (stricte) et une flèche descendante indiquant la décroissance (stricte)

Exemple 11. .

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $f(0) = 1$.
   Donner le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

FIGURE 2 –

Exemple 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 1$. Étudions la monotonie de f sur les intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.

5.2 Taux de variation d'une fonction numérique

Définition 8. .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Le nombre réel $T(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ s'appelle le taux de variation de f entre x et y.

Proposition 2. .

1. Si $T(x, y) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
2. Si $T(x, y) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
3. Si $T(x, y) = 0$ alors f est constante sur I.

Exemple 13. Etudions en utilisant le taux de variation - la monotonie de f dans le cas suivant :

$f(x) = x^2$ (sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$)

Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{x^2-y^2}{x-y}\\ &= \frac{(x-y)(x+y)}{x-y}\\ &= x+y\end{aligned}$$

— Soit x et y deux éléments de $[0,+\infty[$ tels que : $x \neq y$
On a : $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $x+y \geq 0$ et comme $x \neq y$ donc $x+y > 0$ par suite
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \ ou \ \ x, y \in [0,+\infty[\ \ et \ \ x \neq y$$
Ceci signifie que la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

— Soit x et y deux éléments de $]-\infty, 0]$ tels que : $x \neq y$
On a : $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $x+y \leq 0$ et comme $x \neq y$ donc $x+y < 0$ par suite
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \ ou \ \ x, y \in]-\infty, 0] \ \ et \ \ x \neq y$$
Ceci signifie que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Exemple 14. Étudions -En utilisant le taux de variation - la monotonie de f sur les intervalles $[0,+\infty[$ et $]-\infty, 0]$.
$f(x) = 2x^2 + 1$

6 Les extremums d'une fonction numérique

Définition 9. On dit que la fonction f admet un extremum sur l'intervalle I, si elle possède un minimum ou un maximum sur cet intervalle.

Définition 10. :

1. On dit que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle I en a si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leq f(a)$.

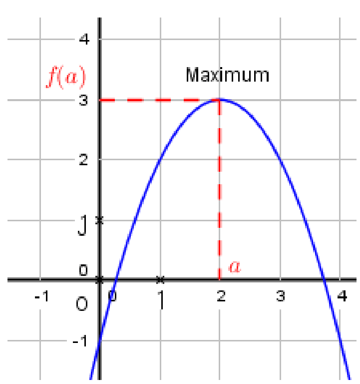

FIGURE 3 –

2. On dit que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle I en a si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geq f(a)$.

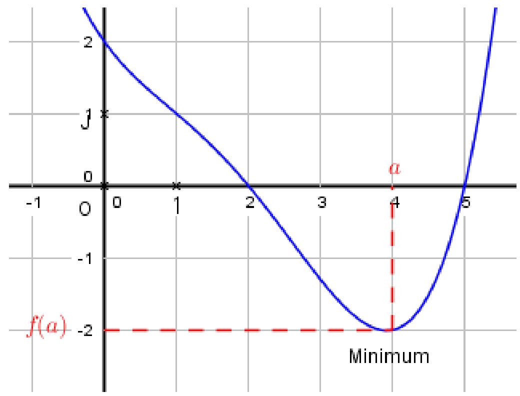

Figure 4 –

Exemple 15. .

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	

Figure 5 –

En utilisant la figure, déduire les variations et les extrêmes de f.

FIN