Dénombrement

1 BAC L

Yahya MATIOUI

26 août 2023

1 Principe générale de dénombrement

Introduction

On lance dans l'air une pièce de monnaie 3 fois successives. Quel est le nombre total de cas possibles ?

— Le premier lancer dispose de 2 possibilités.
— Le deuxième lancer dispose de 2 possibilités.
— Le troisième lancer dispose de 2 possibilités.
  — Donc le nombre total de cas possibles est : $N = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Proposition 1. *(Principe du produit)*
On considère une expérience aléatoire formée de deux choix, si le 1*er choix offre* n_1 *possibilités et le* 2*ème choix offre* n_2 *possibilités, alors le nombre de choix total est :* $\boxed{N = n_1 \times n_2}$

Remarque 1. Le principe du produit se généralise à une expérience aléatoire formée de p choix avec $p \geq 2$. Dans ce cas le nombre de choix total est : $N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$.

Exemple 1. De combien de manières peut-on garer 4 voitures dans 6 places vides dans un parking ?

— Pour la 1ère voiture on dispose de 6 possibilités
— pour la 2ème il en reste 5, pour la 3ème il en reste 4 et pour la 4ème il en reste 3.
  — D'après le principe du produit le total des possibilités pour garer les 4 voitures est : $N = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Exemple 2. Soit $E = \{0, 1, 2, 4\}$. Déterminer le nombre total de nombres ayant 4 chiffres parmi les éléments de E.

On a

milles	cent	dix	unité
3	4	4	4

.

— D'après le principe du produit le total des possibilités est

$$N = 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192.$$

2 Arrangements et Combinaisons

2.1 Arrangements sans répétition

2.1.1 Introduction

On veut former un nombre n de 2 chiffres $n = ab$ choisis parmi $1, 2$ et 3. On exige de plus que tous les chiffres soient distincts deux à deux.

Toute possibilité est un couple (a, b) avec a et b sont distincts deux à deux et choisis parmi les éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

$$1 \overset{2}{\underset{3}{\rightarrow}} \begin{cases} 12 \\ \\ 13 \end{cases} , 2 \overset{1}{\underset{3}{\rightarrow}} \begin{cases} 21 \\ \\ 23 \end{cases} \quad et\ 3 \overset{1}{\underset{2}{\rightarrow}} \begin{cases} 31 \\ \\ 32 \end{cases}$$

Toute possibilité est appelée arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 3. Donc le nombre total de possibilités est 6.

Proposition 2. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$. Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n est :*

$$\boxed{A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)}_{p \quad facteurs}.}$$

Exemple 3. Calculer : A_5^2, A_4^3 et A_6^4.

Remarque 2. Si $p = n$ alors tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n est appelé permutation à n éléments. Le nombre de permutations à n éléments est :

$$A_n^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1}_{n \quad facteurs}$$

Ce nombre est noté $n!$ qu'on lit factoriel n, donc $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

De combien de manières on peut ranger 5 livres dans 5 tiroirs de sorte que chaque tiroir ne peut contenir plus d'un livre ?

Toute possibilité est une permutation à 5 éléments, donc le nombre total de possibilités pour ranger les 5 livres dans les 5 tiroirs est $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Exemple 4. Calculer $5!$, $4!$, $3!$, $2!$, $1!$ et $0!$

2.2 Arrangements avec répétition

2.2.1 Introduction

On veut former un nombre n de 2 chiffres $n = ab$ choisis parmi $1, 2$ et 3. (éventuellement un élément peut apparaître plusieurs fois)

Toute possibilité est appelée arrangement avec répétition de 2 éléments parmi 3. Donc le nombre total de possibilités est 9.

Proposition 3. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*

Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n est : n^p.

2.3 Combinaisons

2.3.1 Introduction

On considère l'ensemble : $E = \{a, b, c, d\}$.

- La liste de toutes les parties de E formés de 2 éléments est : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, ces parties sont appelés combinaison à 2 éléments parmi 4. Leurs nombre est noté $C_4^2 = 6$.
- La liste de toutes les combinaisons à 3 éléments parmi 4 est : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ et $\{b, c, d\}$. Leurs nombre est : $C_4^3 = 4$.

On considère l'ensemble : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Le nombre des parties de trois chiffres qu'on peut formes à partir de E est $C_6^3 = 20$.

Proposition 4. *Soient n et p deux entiers naturels.*

Le nombre de combinaison à p éléments choisis parmi n est : $\boxed{C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}}$

Exemple 5. Calculer : C_4^2 , C_5^3 , C_6^4 et C_2^1.

On a

- $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{4!}{2! \times (4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6.$
- $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{3!} = \dfrac{5!}{3! \times (5-3)!} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10.$

— $C_6^4 = \dfrac{A_6^4}{4!} = \dfrac{6!}{4! \times (6-4)!} = \dfrac{6!}{4! \times 2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 15.$

— $C_2^1 = \dfrac{A_2^1}{1!} = \dfrac{2!}{1! \times (2-1)!} = \dfrac{2 \times 1}{1 \times 1} = 2.$

Exemple 6. On prend simultanément 6 cartes d'un jeu de 32 cartes . On obtient une main de 6 cartes, sans répétition ni ordre . Il s'agit donc d'une combinaison de 6 éléments pris parmi 32 éléments.

Le nombre de mains possibles est : $C_{32}^6 = \dfrac{32!}{6! \times (32-6)!} = \dfrac{32!}{6! \times 26!} = 906192.$

Proposition 5. *Soient n et p deux nombres entiers naturels non nuls $(p \leq n)$*

1. $C_n^n = 1$
2. $C_n^{n-1} = n$
3. $C_n^1 = n.$

3 Différents types de tirages

On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 jusqu'à 10. Pour tirer 3 boules de cette urne, il y a 3 types de tirages possibles :

— Tirage simultané : Lorsqu'on tire les 3 boules simultanément, toute possibilité est une combinaison de 3 éléments choisis parmi 10. Le nombre de tirages possible dans ce cas est : $C_{10}^3 = \dfrac{A_{10}^3}{3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120.$

— Tirage successif avec remise : Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On dit qu'on a effectué un tirage successif avec remise. Chaque possibilité dans ce cas est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 10 et le nombre de tirages possibles est : $10^3 = 1000.$

— Tirage successif sans remise : Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre sans remettre aucune boule tirée dans l'urne. On dit qu'on a effectué un tirage successif sans remise. Chaque possibilité dans ce cas est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 10 et le nombre de tirages possibles est : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

— Résumé des situations :

Type de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénomb–rement
Successifs *AVECremise*	*On tient compte de l'ordre*	*Un élément peut êtretiréplusieursfois*	n^p
Successifs *SANSremise*	*On tient compte de l'ordre*	*Un élément n'est tiré qu'une seule fois*	A_n^p
Simultanés	*L'ordre n'intervient pas*	*Un élément n'est tiré qu'une seule fois*	C_n^p

Exemple 7. Une urne contient 9 boules, on tire trois boules de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages possibles dans chacuns des cas suivants :

1. Tirage simultanément
2. Tirage successifs avec remise
3. Tirage successifs sans remise.

Remarque 3. Quand on utilise plusieurs combinaisons, faut-il additionner ou multiplier ? Cela dépend de la situation !

Concrètement :

1. Si les différentes étapes sont reliées par un "et", on multiplie
2. Si les différents cas sont reliés par un "ou", on additionne.

Exemple 8. Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 4 noires, 1 blanche. On tire simultanément 3 boules de cette urne.

On considère les événements suivants :

1. Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités ?
2. Quel est le nombre de possibilités de tirer trois boules rouges ?
3. Quel est le nombre de possibilités tirer trois boules de même couleur ?
4. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir trois boules de couleurs différentes ?
5. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir au plus une boule rouge ?
6. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir au moins deux boules noires ?
7. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir exactement une boule blanche ?
8. Répondre à la question précédente lors d'un tirage de 3 boules successivement et sans remise.

Question	Tirage Simultanés	Successifs sans remise
1	$card\,(\Omega) = C_8^3 = 56$	$card\,(\Omega) = A_8^3 = 336$
2	$card\,(B) = C_3^3 = 1$	$card\,(B) = A_3^3 = 6$
3	$card\,(N) = C_3^3 + C_4^3$ $= 5$	$card\,(N) = A_3^3 + A_4^3$ $= 30$
4	$card\,(D) = C_3^1 \times C_4^1 \times C_1^1$ $= 12$	$card\,(D) = C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times$ $A_1^1 \times A_3^1 \times A_4^1$ $= 72$
5	$card\,(M) = C_3^1 \times C_5^2 + C_5^3$ $= 40$	$card\,(M) = A_1^1 \times A_3^1 \times A_4^1 \times$ $= \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{}$ $= 240$
6	$card\,(E) = C_4^2 \times C_4^1 \times C_4^3$ $= 28$	$card\,(E) = A_4^2 \times A_4^1 \times C_3^2 \times C_1^1$ $+A_4^3$ $= 168$
7	$card\,(F) = C_1^1 \times C_7^2$ $= 21$	$card\,(F) = C_3^1 \times C_2^2 \times A_1^1 \times A_7^2$ $= 126$

FIN