Rappel et mise à niveau

TS

Yahya MATIOUI

17 août 2023

www.etude-generale.com

1 Les identités remarquables

1. $(a+b)^2 \underset{\overleftarrow{Factorisation}}{\overset{\overrightarrow{Développement}}{=}} a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$
4. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$
7. $a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

2 Les fractions

a, b et c sont des nombres réels.

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
2. $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (condition : $b \neq 0$)
3. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ (condition : $b \neq 0$)
4. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
5. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)

6. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
7. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
8. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ (condition : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$)

3 Les puissances

1. $\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \quad fois} = a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a^1 = a$. (Attention : $\underbrace{a + a + ... + a}_{n \quad fois} = na$)
2. Pour tout réel non nul, on a $a^0 = 1$.
3. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{n \times m}$, $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ et $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

4 Les racines carrées

Soit a un réel positif. On appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif b tel que : $b^2 = a$ (et on écrit : $b = \sqrt{a}$).

1. $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)
3. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (condition : $a \geq 0$ et $b > 0$)
4. $\begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b \\ \\ \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \end{cases}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)
5. Si $a > 0$, alors $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
6. .
   (a) Le conjugué de $\sqrt{A}+B$ est $\sqrt{A}-B$ et on a $\left(\sqrt{A} + B = \dfrac{\left(\sqrt{A} + B\right)\left(\sqrt{A} - B\right)}{\sqrt{A} - B}\right)$
   (b) Le conjugué de $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x + 2$ est $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 2$.

5 Valeur absolue

Soient x, y, a, b et r sont des réels

1. $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}), |x| \geq 0$
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
5. Si $a \geq 0$, alors $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
6. $|a \times b| = |a| \times |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$ et $|a^n| = |a|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$ (condition : $r \geq 0$)
8. $|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r$ ou $x \leq -r$ (condition : $r \geq 0$)
9. $x^2 \leq r \Leftrightarrow -\sqrt{r} \leq x \leq \sqrt{r}$ (condition : $r \geq 0$)
10. $x^2 \geq r \Leftrightarrow x \geq \sqrt{r}$ ou $x \leq -\sqrt{r}$ (condition : $r \geq 0$)

6 Signe de $ax + b$ - inéquation (avec produit ou quotient)

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$signe(-a)$	0	$signe(a)$

FIGURE 1 –

Pour résoudre des inéquations « produit » $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou « quotient » $\frac{ax + b}{cx + d} \geq 0$ on utilise un tableau de signe.

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x + 1)(x + 2)(-2x + 3) < 0$.

   On a $\begin{cases} x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		$-\infty$
x+1		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x+2		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-2x$+3		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

FIGURE 2 –

Donc $S =]-2,-1[\bigcup \left]\frac{3}{2},+\infty\right[$.

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{5x-2}{1+3x} \leq 0$

   L'expression $\dfrac{5x-2}{1+3x}$ existe si et seulement si $1+3x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \dfrac{-1}{3}$.

   On a $\begin{cases} 5x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5} \\ \\ 1+3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x$−2		$-$	|	$-$	0	$+$	
1+3x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

FIGURE 3 –

donc $S =]\dfrac{-1}{3},\dfrac{2}{5}]$

7 Le second degré ax^2+bx+c avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$

1. Comment résoudre une équation du second degré (E) : $ax^2+bx+c=0$? $(a \neq 0)$

   (a) Méthode classique : calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$

i. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

ii. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

iii. Si $\Delta < 0$, alors $S = \phi$.

(b) Autres méthodes et astuces : Forme canonique $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$ puis factoriser si possible ...

(c) Si $c = 0$ alors

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax+b\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou x = \frac{-b}{a}$$

(Donc si $c = 0$ alors 0 et $\dfrac{-b}{a}$ sont les solutions de (E)).

2. Comment déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$?

(a) Commencer par calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

i. Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$

ii. Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq \dfrac{-b}{2a}$

iii. Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe contraire de a entre les racines.

8 Signe d'expression avec racines carrées

1. Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - B$? (avec $A \geq 0$ et $B \neq 0$)

(a) Si $B < 0$, alors $-B > 0$ et $\sqrt{A} \geq 0$, donc $\sqrt{A} - B > 0$

(b) Si $B > 0$, on multiplie et on divise par le conjugué $\sqrt{A} + B$:

$$\sqrt{A} - B = \frac{\left(\sqrt{A}-B\right)\left(\sqrt{A}+B\right)}{\sqrt{A}+B} = \frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$$

alors le signe de $\sqrt{A} - B$ est celui de $A - B^2$.

2. Comment déterminer le signe de $\sqrt{A}-\sqrt{B}$? (avec $A\geq 0$ et $B\geq 0$)
On a :

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

Donc le signe de $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ est celui de $A-B$.

9 Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/f\left(x\right)\ \textit{existe}\ \right\}$$

Techniques pour chercher l'ensemble de définition d'une fonction
Soient P et Q deux fonctions polynomes et f une fonction numérique.

Expression de la fonction f	Détermination de D_f
$f\left(x\right)=P\left(x\right)$	$D_f=\mathbb{R}$
$f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q\left(x\right)\neq 0\}$
$f\left(x\right)=\sqrt{P\left(x\right)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/P\left(x\right)\geq 0\}$
$f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{\sqrt{Q\left(x\right)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q\left(x\right)>0\}$
$f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}}$	$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}\geq 0\ \textit{et}\ \ Q\left(x\right)\neq 0\ \right\}$
$\underset{a>0}{f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{\sqrt{Q\left(x\right)}-a}}$	$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/Q\left(x\right)\geq 0\ \textit{et}\ \ \sqrt{Q\left(x\right)}-a\neq 0\ \right\}$

1. Déterminer l'ensemble de défnition de la fonction f :

$$f\left(x\right)=\frac{|x|\left(x+1\right)}{x\left(2x^2+x-3\right)},\ f\left(x\right)=\sqrt{2x^2-3x+1},\ f\left(x\right)=\sqrt{\frac{x^2-1}{2x-1}},\ f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

(a) On a : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\left(2x^2+x-3\right)\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\quad ou\quad 2x^2+x-3\neq 0\right.$
Le discriminant de l'équation $2x^2+x-3=0$ est $\Delta=25$ donc les solutions de l'équation sont $x_1=1$ et $x_2=\dfrac{-3}{2}$, donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-3}{2},0,1\right\}}$

(b) On a : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1>0\right\}$
L'équation $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=1$. Etudions maintenant le signe de $2x^2-3x+1$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 4 –

Donc $\boxed{D_f =]-\infty, \frac{1}{2}] \bigcup [1, +\infty[}$

(c) On a : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{x^2-1}{2x-1} \geq 0 \quad et \quad 2x-1 \neq 0 \right\}$. Etudions le signe de $\dfrac{x^2-1}{2x-1}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x2-1}{2x-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

FIGURE 5 –

Donc $\boxed{S = [-1, \frac{1}{2}[\bigcup [1, +\infty[}$

(d) On a :

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad \sqrt{x} + 2 \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad \sqrt{x} \neq -2 \right\} \end{aligned}$$

donc $\boxed{D_f = [0, +\infty[}$

FIN