Rappel et mise à niveau

1 BAC
L

Yahya MATIOUI

27 août 2023

www.etude-generale.com

1 Les opérations dans l'ensemble des nombres réels

Soient a, b, c et d des nombres réels. On a :

1. $a\left(b+c\right)=ab+ac$
2. $\left(a+b\right)\left(c+d\right)=ac+ad+bc+db$
3. $-\left(a+b-c\right)=-a-b+c$

Exemple 1. Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$$A=5\left(x+3\right),B=-3\left(x^{2}+2x-1\right),C=\left(2x-3\right)\left(4x+2\right)$$

Soient a, b, c et d des nombres réels. On a :

1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$ (condition : $b\neq0$ et $d\neq0$)
2. $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}=\dfrac{b}{a}$ (condition : $a\neq0$ et $b\neq0$)
3. $\dfrac{a}{b}=c$ $(b\neq0)$ equivaux à $a=bc$
4. $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$ (condition : $b\neq0$ et $d\neq0$)
5. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$ (condition : $b\neq0$, $d\neq0$ et $c\neq0$)
6. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ $(b\neq0)$ et $(d\neq0)$ équivaux à $ad=bc$

Exemple 2. Calculer :

1. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{5}$
2. $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}$
3. $\dfrac{7}{5}\times\dfrac{2}{3}$
4. $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{2}}$

2 Identité remarquables

Soient a et b deux nombres réels, on a :

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Exemple 3. Développer :

$$A=(x+2)^2\,,B=(x-1)^2 \quad ,C=2\,(x+4)^2$$

$$D=(x+2)\,(x-2)\,,E=(x+1)\,(x-1)^2 \quad ,F=2x\,(x+1)^2$$

3 Puissances - Ecriture scientifique

Puissances

Soient a et b deux nombres réels non nuls et soient m et n deux nombres entiers relatifs non nuls. On a :

1. $a^m\times a^n=a^{m+n}$
2. $(a^m)^n=a^{m\times n}$
3. $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
4. $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$
5. $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemple 4. Simplifier les nombres suivants :

$$A=x^7\times x^8, B=\left(x^2\times y^3\right)^2 \quad et\ C=\frac{x^4\left(x^2\times y^3\right)^2}{x^7\times y^4}$$

Ecriture scientifique

Tout nombre décimal positif x peut s'écrire en écriture scientifique sous la forme : $x = a \times 10^p$ avec a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p appartient à $\mathbb{Z}$ cette écriture s'appelle l'écriture scientifique.

Exemple 5. Ecrire les nombres suivants en écriture scientifique :

$$0,02; 0,00015; 0,5; -0,7; 34500; 0,045 \times 10^{12}$$

4 Racines carrés

Soient a et b deux nombres positifs. On a :

1. $\sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = a$
2. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$ $(a \neq 0)$
4. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

Exemple 6. Calculer : $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$, $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$, $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$ et $\sqrt{\dfrac{81}{10}} \times \sqrt{\dfrac{40}{9}}$

5 Ensemble des nombres

1. On note l'ensemble des entiers naturels par $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
2. On note l'ensemble des entiers naturels non nuls par $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
3. On note l'ensemble des entiers relatifs par $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
4. On note l'ensemble des nombres décimaux par ID : $ID = \left\{ \dfrac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z} \ et \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$
5. On note l'ensemble des nombres rationnels par $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \ et \ \ b \in \mathbb{N}^* \right\}$
6. On note l'ensemble des nombres réels par $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

Exemple 7. Compléter à l'aide de l'un des symboles suivants : $\in$ ou $\notin$

1. $10 \ldots \mathbb{N}$
2. $-6 \ldots \mathbb{N}$

3. $\frac{2}{3} \dots \mathbb{R}$
4. $14 \dots \mathbb{Z}$
5. $1,33 \dots ID$
6. $3,5 \dots \mathbb{Z}$
7. $\frac{\sqrt{2}}{3} \dots \mathbb{Q}$
8. $\sqrt{49} \dots \mathbb{N}$

6 Signe de $ax + b$ - inéquation (avec produit ou quotient)

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$signe(-a)$	0	$signe(a)$

FIGURE 1 –

Pour résoudre des inéquations « produit » $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ ou « quotient » $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ on utilise un tableau de signe.

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x+1)(x+2)(-2x+3) < 0$.

   On a $\begin{cases} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \\ x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \\ -2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$Produit$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

FIGURE 2 –

Donc $S =]-2, -1[\bigcup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{5x-2}{1+3x} \leq 0$

L'expression $\dfrac{5x-2}{1+3x}$ existe si et seulement si $1+3x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \dfrac{-1}{3}$.

On a $\begin{cases} 5x-2=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5} \\ \\ 1+3x=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$		$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$5x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$1+3x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{5x-2}{1+3x}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

FIGURE 3 –

donc $S =]\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{5}]$

7 Le second degré ax^2+bx+c avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$

1. Comment résoudre une équation du second degré (E) : $ax^2+bx+c=0$? $(a \neq 0)$

   (a) Méthode classique : calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$

      i. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

      ii. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

      iii. Si $\Delta < 0$, alors $S = \phi$.

2. Factorisation d'un trinome du second degré ax^2+bx+c , $(a \neq 0)$

   (a) Si $\Delta < 0$, alors ax^2+bx+c ne peut pas étre factorisé dans $\mathbb{R}$.

   (b) Si $\Delta = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,on a : $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

(c) Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet 2 solutions réelles distinctes x_1 et x_2 et on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple 8. .

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $(E) : x^2 - 3x + 2 = 0$ et $(E') : x^2 + 3x + 4 = 0$.
2. Factoriser les trinomes suivants : $P(x) = 6x^2 - x - 1$, $Q(x) = x^2 - 10x + 25$ et $R(x) = x^2 + x + 1$.

8 Généralité sur les fonctions numériques

1. L'image d'un nombre x par la fonction f est unique et se note $f(x)$. Si y et l'image de x, on a l'égalité $f(x) = y$ est appelé un antécédent de y par la fonction f.
2. L'ensemble de définition d'une fonction f, noté souvent D_f, est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles $f(x)$ est calculable.
3. Soit f une fonction définie sur un ensemble I.

   On dit que la fonction f est paire si, pour tout $x \in I$, on a $\boxed{\begin{cases} -x \in I \\ f(-x) = f(x) \end{cases}}$.

   On dit que la fonction f est impaire si, pour tout $x \in I$, on a $\boxed{\begin{cases} -x \in I \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}}$

4. Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition. On dit que :
   (a) f est strictement croissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que : $a \leq b$, on a $f(a) < f(b)$.
   (b) f est strictement décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que : $a \leq b$, on a $f(a) > f(b)$.

Exemple 9. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + 3$.

1. Calculer l'image des nombres suivants : 0, 2 et -1.
2. Déterminer les antécédents de 5 et 9.

Exemple 10. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x + 4, g(x) = \frac{1}{x} \quad et\ h(x) = \frac{x+1}{x-4}$$