Notions de logique

1 BAC L

Yahya MATIOUI

22 août 2023

www.etude-generale.com

1 Proposition-Fonction propositionnelle

Définition 1. Une proposition est une phrase mathématique qui est soit vraie soit fausse , pas les deux en même temps.

Exemple 1. .

1. P : "$6 \times 3 = 18$" est une proposition vraie.
2. Q : "$3 - 1 = 9$" est une proposition fausse.
3. R : " 4 *est un nombre pair* " est une proposition vraie.

Définition 2. Une fonction propositionnelle est une expression mathématique de la forme " $x \in E \quad , \quad P(x)$ " avec E est un ensemble connu et x est une variable de E. Elle devient une proposition chaque fois qu'on remplace la variable x par une valeur.

Exemple 2. " $x \in \mathbb{R}, \ \ x^2 = \ 1$ " est une fonction propositionnelle.
Pour $x = 1$ on a "$1^2 = 1$" est une proposition vraie.
Pour $x = 2$ on a "$2^2 = 1$" est une proposition fausse.

2 Quantificateur

Définition 3. Soit "$x \in E, \ P(x)$" une fonction propositionnelle.

1. Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$

   alors on dit que « Quel que soit x de E tel que $P(x)$ est vraie » et on écrit : "$\forall x \in E, \quad P(x)$"

2. Si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$

   alors on dit que « il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ est vraie » et on écrit : "$\exists x \in E,\ P(x)$"
3. Si $P(x)$ est vraie pour un unique $x \in E$

   alors on dit que « il existe un unique x de E tel que $P(x)$ est vraie » et on écrit : "$\exists! x \in E,\ P(x)$"

Exemple 3. .

1. P_1 : "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ " est une proposition vraie.
2. P_2 : "$\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0$ " est une proposition fausse.
3. P_3 : "$\forall x \in \mathbb{R}, x+1=0$" est une proposition fausse.
4. P_4 : "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 7$" est une proposition vraie.
5. P_5 : "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 9$" est une proposition vraie.
6. P_5 : "$\exists n \in \mathbb{Z}, n = \dfrac{1}{2}$" est une proposition fausse.

3 Les opérations logiques

3.1 La négation logique

Définition 4. La négation logique d'un proposition P est une proposition qu'on la note par $\overline{P}$ et on a la table de vérité suivante :

P	0	1
$\overline{P}$	1	0

Exemple 4. .

1. P_1 : "$\forall x \in \mathbb{R}, x+1=2$" et $\overline{P_1}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, x+1 \neq 2$"
2. P_2 : "$\exists x \in \mathbb{Z}, n > 0$" et $\overline{P_2}$: "$\forall x \in \mathbb{Z}, n \leq 0$"
3. P_3 : "$\exists x \in \left]1,+\infty\right[, x+1 \in \mathbb{Z}$" et $\overline{P_3}$: "$\forall x \in \left]1,+\infty\right[, x+1 \notin \mathbb{Z}$"
4. P_4 : "$\forall x \in \mathbb{R}, x < 0$" et $\overline{P_4}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0$"

3.2 La conjonction logique ("*et*")

Définition 5. La conjonction de deux propositions P et Q notée $\left(P \ \ et \ \ Q\right)$ est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies.

Table de vérité de $\left(P \quad et \quad Q\right)$

P	Q	$PetQ$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figure 1 –

Exemple 5. .

1. P : "$3 \geq 1$ *et* $2^2 = 4$ " est une proposition vraie
2. Q : " $-3 \in \mathbb{N}$ *et* $2 \times 4 = 8$ " est une proposition fausse
3. R : "$2 + 4 + 6 = 3 \times 4$ *et* $3 \times 4 = 12$ " est une proposition vraie.

3.3 Disjonction logique ("*ou*")

Définition 6. La disjonction de deux propositions P et Q notée $\big(P \ \ ou \ \ Q \big)$ est vraie si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie.

Table de vérité de $\big(P \ \ ou \ \ Q \big)$

P	Q	$PouQ$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Figure 2 –

Exemple 6. .

1. P : "$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ *ou* $5 > 0$ " est une proposition vraie.
2. Q : "$9 + 6 = 15$ *ou* $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{2}$ " est une proposition vraie
3. R : "$9 - 6 = 10$ *ou* $2 > 6$ " est une proposition fausse.

3.4 L'implication logique (" $\Rightarrow$ ")

Définition 7. Soit P et Q deux propositions. L'implication des deux propositions P et Q dans cet ordre est la proposition noté $(P \Rightarrow Q)$, se lit « P implique Q » (ou si P alors Q) est vraie si P et Q sont vraies ou si P est fausse.

Table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 7. .

1. P : " $-1 = 1 \Rightarrow 2^2 = 1$" la proposition est vraie
2. Q : "$4 = 2^2 \Rightarrow -2 = 2$" la proposition est fausse
3. R : " $-4 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 > 0$" la proposition est vraie.

3.5 L'équivalence logique (" $\Leftrightarrow$ ")

Définition 8. Soit P et Q deux propositions. L'équivalence de P et Q notée $(P \Leftrightarrow Q)$ est la proposition qui est vraie si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Table de vérité de $(P \Leftrightarrow Q)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 8. .

1. P : "$\sqrt{2} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{16} = -4$" est une proposition fausse.
2. Q : "$\sqrt{29} = 7 \Leftrightarrow 7 \ est \ \ impair$ " est une proposition fausse
3. R : "$3 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 7 \geq 5$" est une proposition vraie.

Exercice 1. Donner la vérité et la négation des propositions suivantes :

1. P_1 : "$\sqrt{4} = -2 \ et \ \ 4^2 = 8$ "
2. P_2 : "$3 < 1 \ et \ \ 3 \times 3 = 9$ "
3. P_3 : "$5{\times}1 = 5 \ ou \ \ 3 \in \mathbb{N}$ "
4. P_4 : $8 + 1 = 20 \ et \ \ 5 - 2 = 11$ "
5. P_5 : " $(\exists x \in \mathbb{R}), 3x - 5 = 0$"
6. P_6 : " $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 < 0$"

4 Raisonnements mathématiques

4.1 Raisonnement par équivalences successives

Pour montrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut modifier P de proche en proche jusqu'à obtenir Q en préservant les équivalences à chaque étape. On rédige alors de la manière suivante :

$$P \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q$$

conclusion on a bien montré l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$.

Exemple 9. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que : $a^2 + b^2 \geq 2ab$
On a : $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$
et comme $(a-b)^2 \geq 0$ est une proposition vraie donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Exemple 10. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), \dfrac{x^2+1}{2} \geq x$

4.2 Raisonnement par disjonction des cas

Ce raisonnement est utilisé pour montrer une proposition de type "$\forall x \in E,\ P(x)$" avec $E = E_1 \bigcup E_2 \bigcup ... \bigcup E_n$, alors pour ce faire on sépare les raisonnements suivant que $x \in E_1$, $x \in E_2$,...,$x \in E_n$

Exemple 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : |x| = 2$

1er cas . Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ donc $(E) \Leftrightarrow x = 2$ par suite

$$S_1 = \{2\}$$

2emecas Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$ donc $(E) \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$ par suite

$$S_2 = \{-2\}$$

D'ou $S = S_1 \bigcup S_2 = \{-2, 2\}$.

Exemple 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x-3| = 2$

4.3 Raisonnement par l'absurde

Quand $\overline{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple 13. Soit $a \notin \mathbb{Q}$, montrer que : $(2+a) \notin \mathbb{Q}$.
Par l'absurde, supposons que : $(2+a) \in \mathbb{Q}$.
Donc il existe $b \in \mathbb{Q}$ tel que : $2+a=b$ donc $a=b-2$ et comme $2 \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $b-2 \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire $a \in \mathbb{Q}$ ce qui est contradictoire avec $a \notin \mathbb{Q}$. Donc $(2+a) \notin \mathbb{Q}$.

FIN