Rappel et mise à niveau

TCSI

Yahya MATIOUI

21 août 2023

www.etude-generale.com

1 Les identités remarquables

1. $(a+b)^2 \underset{\underleftarrow{Factorisation}}{\overset{\overrightarrow{Développement}}{=}} a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

Exemple 1. Soient x et y deux réels non nuls. Simplifier :

$$A=(2x+y)^2-(5x-y)^2, B=\left(\frac{4}{7}x+2y\right)\left(\frac{4}{7}x-2y\right), C=(2x-5y)^2$$

Exemple 2. Soient x et y deux réels. Factoriser les expressions suivantes :

$$A=(x+y)(2x+5y)+x(x+y)-y(x+y)$$

$$B=(2x-y)(x-y)-x(y-2x)$$

$$C=(x-2)^2+(x+y)(2-x)$$

$$D=x(x-y)^2+2(y-x)^2$$

2 Les fractions

a, b et c sont des nombres réels.

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
2. $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (condition : $b \neq 0$)
3. $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ (condition : $b \neq 0$)
4. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} \pm \dfrac{cb}{bd} = \dfrac{ad \pm cb}{bd}$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
5. $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
6. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
7. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
8. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ (condition : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$)

Exemple 3. Calculer :

$$A = \left(3 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{3}\right) + \left(6 - \frac{2}{15}\right)\left(4 - \frac{7}{5} + \frac{2}{3}\right) \quad et \quad B = \frac{2 + \frac{1}{4}}{3 - \frac{1}{4}} \times \frac{1 + \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} - 2} \times \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{2 - \frac{1}{6}}$$

1. On a

$$\begin{aligned}
A &= \left(3 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{3}\right) + \left(6 - \frac{2}{15}\right)\left(4 - \frac{7}{5} + \frac{2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{3 \times 15}{1 \times 15} - \frac{1 \times 3}{5 \times 3} - \frac{4 \times 5}{3 \times 5}\right) \times \frac{15}{3} + \left(\frac{6 \times 15}{15} - \frac{2}{15}\right)\left(\frac{4 \times 15}{15} - \frac{7 \times 3}{5 \times 3} + \frac{2 \times 5}{3 \times 5}\right) \\
&= \left(\frac{45}{15} - \frac{3}{15} - \frac{20}{15}\right) \times \frac{15}{3} + \left(\frac{90}{15} - \frac{2}{15}\right)\left(\frac{60}{15} - \frac{21}{15} + \frac{10}{15}\right) \\
&= \frac{22}{15} \times \frac{15}{3} + \frac{88}{15} \times \frac{49}{15} \\
&= \frac{22}{3} + \frac{4312}{225} \\
&= \frac{22 \times 75}{225} + \frac{4312}{225} \\
&= \frac{5962}{225}
\end{aligned}$$

2. On a

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{2+\dfrac{1}{4}}{3-\dfrac{1}{4}} \times \frac{1+\dfrac{2}{5}}{\dfrac{4}{5}-2} \times \frac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}}{2-\dfrac{1}{6}} \\
&= \frac{\dfrac{9}{4}}{\dfrac{11}{4}} \times \frac{\dfrac{7}{5}}{\dfrac{-6}{5}} \times \frac{\dfrac{3}{6}}{\dfrac{11}{6}} \\
&= \frac{9}{4} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{5} \times \frac{5}{-6} \times \frac{3}{6} \times \frac{6}{11} \\
&= \frac{9 \times 7 \times 3}{11 \times (-6) \times 11} \\
&= \frac{9 \times 7}{-242} \\
&= -\frac{63}{242}
\end{aligned}
$$

Exemple 4. Simplifier : $\dfrac{3+\dfrac{2}{5}-\dfrac{7}{2}}{3-\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{2}}$, $\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}} \times \dfrac{1+\dfrac{1}{6}}{1-\dfrac{1}{6}}$

— On a : $\dfrac{3+\dfrac{2}{5}-\dfrac{7}{2}}{3-\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\dfrac{30}{10}+\dfrac{4}{10}-\dfrac{35}{10}}{\dfrac{30}{10}-\dfrac{4}{10}+\dfrac{35}{10}} = \dfrac{\dfrac{-1}{10}}{\dfrac{61}{10}} = \dfrac{-1}{61}$

— On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} \times \frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} &= \frac{\frac{8}{12}-\frac{3}{12}}{\frac{8}{12}+\frac{3}{12}} \times \frac{\frac{6}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{6}{6}-\frac{1}{6}} \\
&= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{11}{12}} \times \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{6}} \\
&= \left(\frac{5}{12} \times \frac{12}{11}\right) \times \left(\frac{7}{6} \times \frac{6}{5}\right) \\
&= \frac{5}{11} \times \frac{7}{5} \\
&= \frac{7}{11}
\end{aligned}$$

3 Les puissances

1. $\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \quad fois} = a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a^1 = a$. (Attention : $\underbrace{a + a + ... + a}_{n \quad fois} = na$)
2. Pour tout réel non nul, on a $a^0 = 1$.
3. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{n \times m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ et $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Exemple 5. .Simplifier en utilisant les propriétés des puissances le nombre A tel que :
$A = \frac{\left(3^2 \times 11^5\right)^{-2}}{\left(3^4 \times 11^2\right)^3} \times \frac{33^{15}}{3^2 \times 11^{-1}}$
On a

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\left(3^2 \times 11^5\right)^{-2}}{\left(3^4 \times 11^2\right)^3} \times \frac{33^{15}}{3^2 \times 11^{-1}} \\
&= \frac{\left(3^2\right)^{-2} \times \left(11^5\right)^{-2}}{\left(3^4\right)^3 \times \left(11^2\right)^3} \times \frac{(3 \times 11)^{15}}{3^2 \times 11^{-1}} \\
&= \frac{3^{-4} \times 11^{-10}}{3^{12} \times 11^6} \times \frac{3^{15} \times 11^{15}}{3^2 \times 11^{-1}} \\
&= \frac{3^{-4+15} \times 11^{-10+15}}{3^{12+2} \times 11^{6-1}} \\
&= \frac{3^{11} \times 11^5}{3^{14} \times 11^5} \\
&= \frac{1}{3^3} \\
&= \frac{1}{27}
\end{aligned}
$$

Exemple 6. Soient a et b deux réels non nuls. Simplifie : $E = \dfrac{a^2 b^{-3} \times \left(a^4 b^{-1}\right)^{-2} \times a^{-5}}{\left(a^{-1} b^5\right)^{-4} \times \left(a^{-3} b^{10}\right) \times \left(b^{-2}\right)^{-3}}$

On a

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{a^2 b^{-3} \times \left(a^{-4} b^{-1}\right)^{-2} \times a^{-5}}{\left(a^{-1} b^5\right)^{-4} \times \left(a^{-3} b^{10}\right) \times \left(b^{-2}\right)^{-3}} \\
&= \frac{a^2 b^{-3} \times a^8 b^2 \times a^{-5}}{a^4 b^{-20} \times a^{-3} b^{10} \times b^6} \\
&= \frac{a^5 b^{-1}}{a b^{-4}} \\
&= a^4 b^3
\end{aligned}
$$

4 Les racines carrées

Soit a un réel positif. On appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif b tel que : $b^2 = a$ (et on écrit : $b = \sqrt{a}$).

1. $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)
3. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (condition : $a \geq 0$ et $b > 0$)

4. $\begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b \\ \\ \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \end{cases}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)

5. Si $a > 0$, alors $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

6. .

   (a) Le conjugué de $\sqrt{A}+B$ est $\sqrt{A}-B$ et on a $\left(\sqrt{A}+B = \dfrac{\left(\sqrt{A}+B\right)\left(\sqrt{A}-B\right)}{\sqrt{A}-B}\right)$

   (b) Le conjugué de $\sqrt{x^2-2x+3}-x+2$ est $\sqrt{x^2-2x+3}+x-2$.

Exemple 7. On considère les nombres : $a = \sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}$ et $b = \sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

1. Simplifier a et b.
2. Déduire que : $\sqrt{2a+5b} = 1$.

— Simplifions a et b :
  — On a :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-7^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}{50-49}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}{1}} \\ &= \sqrt{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2} \\ &= 5\sqrt{2}-7 \end{aligned}$$

— On a :

$$
\begin{aligned}
b &= \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}} \\
&= \sqrt{\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}{1}} \\
&= 3-2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

— Déduisons que : $\sqrt{2a+5b}=1$

— On a $\sqrt{2a+5b}=\sqrt{2\left(5\sqrt{2}-7\right)+5\left(3-2\sqrt{2}\right)}=\sqrt{-14+15}=1.$

Exemple 8. a, b et c des réels non nuls. Simplifier $\sqrt{\dfrac{9a^4}{a^6b^8}}$

On a :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{9a^4}{a^6b^8}} &= \sqrt{\frac{3^2\left(a^2\right)^2}{\left(a^3\right)^2\left(b^4\right)^2}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{3a^2}{a^3b^4}\right)^2} \\
&= \frac{3a^2}{a^3b^4} \\
&= \frac{3}{ab^4}
\end{aligned}
$$

Exemple 9. Simplifier : $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{3}{3+\sqrt{5}}-\dfrac{11-\sqrt{5}}{4}$

On a

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}-1}+\frac{3}{3+\sqrt{5}}-\frac{11-\sqrt{5}}{4} &= \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}+\frac{3\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}-\frac{11-\sqrt{5}}{4}\\ &= \frac{2\sqrt{5}+2+9-3\sqrt{5}-11+\sqrt{5}}{4}\\ &= 0\end{aligned}$$

5 Equations du premier degré à une inconnue

Exemple 10. Résoudre les équations suivantes :

$$3x-2=5x+7$$

$$3\left(1-2x\right)=-3\left(2x+1\right)+5$$

$$\frac{5x}{2}-\frac{x-3}{4}=5-\frac{3x}{8}$$

$$\sqrt{2}x-1=\sqrt{2}+3x$$

$$x\left(-9x-6\right)\left(7-x\right)=0$$

$$\left(7x-3\right)^2=\left(x+2\right)^2$$

$$\left(25x^2-1\right)+15x+3-\left(5x+1\right)^2=0$$

$$x^2+6x+9-5\left(x+3\right)=0$$

$$15x^3+6x=5x^2+2$$