Rappel et mise à niveau

2 BAC
PC
SVT

Yahya MATIOUI

19 août 2023

www.etude-generale.com

1 Les identités remarquables

1. $(a+b)^2 \underset{\overleftarrow{Factorisation}}{\overset{\overrightarrow{Développement}}{=}} a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
7. $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

2 Les fractions

a, b et c sont des nombres réels.

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
2. $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (condition : $b \neq 0$)
3. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ (condition : $b \neq 0$)
4. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
5. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (condition : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)

6. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
7. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
8. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ (condition : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$)

3 Les puissances

1. $\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \quad fois} = a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a^1 = a$. (Attention : $\underbrace{a + a + ... + a}_{n \quad fois} = na$)
2. Pour tout réel non nul, on a $a^0 = 1$.
3. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{n \times m}$, $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ et $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

4 Les racines carrées

Soit a un réel positif. On appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif b tel que : $b^2 = a$ (et on écrit : $b = \sqrt{a}$).

1. $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)
3. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (condition : $a \geq 0$ et $b > 0$)
4. $\begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b \\ \\ \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \end{cases}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)
5. Si $a > 0$, alors $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
6. .
   (a) Le conjugué de $\sqrt{A}+B$ est $\sqrt{A}-B$ et on a $\left(\sqrt{A} + B = \dfrac{\left(\sqrt{A}+B\right)\left(\sqrt{A}-B\right)}{\sqrt{A}-B}\right)$
   (b) Le conjugué de $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x + 2$ est $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 2$.

5 Valeur absolue

Soient x, y, a, b et r sont des réels

1. $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}), |x| \geq 0$
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
5. Si $a \geq 0$, alors $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
6. $|a \times b| = |a| \times |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$ et $|a^n| = |a|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$ (condition : $r \geq 0$)
8. $|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r$ ou $x \leq -r$ (condition : $r \geq 0$)
9. $x^2 \leq r \Leftrightarrow -\sqrt{r} \leq x \leq \sqrt{r}$ (condition : $r \geq 0$)
10. $x^2 \geq r \Leftrightarrow x \geq \sqrt{r}$ ou $x \leq -\sqrt{r}$ (condition : $r \geq 0$)

6 Signe de $ax + b$ - inéquation (avec produit ou quotient)

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$signe(-a)$	0	$signe(a)$

FIGURE 1 –

Pour résoudre des inéquations « produit » $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou « quotient » $\dfrac{ax + b}{cx + d} \geq 0$ on utilise un tableau de signe.

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x + 1)(x + 2)(-2x + 3) < 0$.

   On a $\begin{cases} x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-2x+3$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

FIGURE 2 –

Donc $S =]-2,-1[\bigcup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{5x-2}{1+3x} \leq 0$

   L'expression $\frac{5x-2}{1+3x}$ existe si et seulement si $1+3x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{-1}{3}$.

   On a $\begin{cases} 5x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \\ \\ 1+3x=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$1+3x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

FIGURE 3 –

donc $S =]\frac{-1}{3}, \frac{2}{5}]$

7 Le second degré ax^2+bx+c avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$

1. Comment résoudre une équation du second degré (E) : $ax^2+bx+c=0$? $(a \neq 0)$

   (a) Méthode classique : calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

i. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

ii. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

iii. Si $\Delta < 0$, alors $S = \phi$.

(b) Autres méthodes et astuces : Forme canonique $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$ puis factoriser si possible ...

(c) Si $c = 0$ alors

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x\,(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou x = \frac{-b}{a}$$

(Donc si $c = 0$ alors 0 et $\dfrac{-b}{a}$ sont les solutions de (E)).

2. Comment déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$?

(a) Commencer par calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

i. Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$

ii. Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq \dfrac{-b}{2a}$

iii. Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe contraire de a entre les racines.

8 Signe d'expression avec racines carrées

1. Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - B$? (avec $A \geq 0$ et $B \neq 0$)

(a) Si $B < 0$, alors $-B > 0$ et $\sqrt{A} \geq 0$, donc $\sqrt{A} - B > 0$

(b) Si $B > 0$, on multiplie et on divise par le conjugué $\sqrt{A} + B$:

$$\sqrt{A} - B = \frac{\left(\sqrt{A}-B\right)\left(\sqrt{A}+B\right)}{\sqrt{A}+B} = \frac{A - B^2}{\sqrt{A}+B}$$

alors le signe de $\sqrt{A} - B$ est celui de $A - B^2$.

2. Comment déterminer le signe de $\sqrt{A}-\sqrt{B}$? (avec $A \geq 0$ et $B \geq 0$)
   On a :

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

   Donc le signe de $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ est celui de $A-B$.

9 Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

$$D_f=\left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \ \textit{existe}\ \right\}$$

Techniques pour chercher l'ensemble de définition d'une fonction

Soient P et Q deux fonctions polynomes et f une fonction numérique.

Expression de la fonction f	Détermination de D_f
$f(x)=P(x)$	$D_f=\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f=\{x \in \mathbb{R}/Q(x) \neq 0\}$
$f(x)=\sqrt{P(x)}$	$D_f=\{x \in \mathbb{R}/P(x) \geq 0\}$
$f(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f=\{x \in \mathbb{R}/Q(x) > 0\}$
$f(x)=\sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f=\left\{x \in \mathbb{R}/\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \ \textit{et} \ \ Q(x) \neq 0\ \right\}$
$f(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}-a}$ $_{a>0}$	$D_f=\left\{x \in \mathbb{R}/Q(x) \geq 0 \ \textit{et} \ \ \sqrt{Q(x)}-a \neq 0\ \right\}$

1. Déterminer l'ensemble de défnition de la fonction f :

$$f(x)=\frac{|x|(x+1)}{x\left(2x^2+x-3\right)},\ f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1},\ f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{2x-1}},\ f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

   (a) On a : $D_f=\left\{x \in \mathbb{R}/x\left(2x^2+x-3\right) \neq 0\right\}=\left\{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \quad ou \quad 2x^2+x-3 \neq 0\ \right\}$
   Le discriminant de l'équation $2x^2+x-3=0$ est $\Delta=25$ donc les solutions de l'équation sont $x_1=1$ et $x_2=\dfrac{-3}{2}$, donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-3}{2},0,1\right\}}$

   (b) On a : $D_f=\left\{x \in \mathbb{R}/2x^2-3x+1>0\right\}$
   L'équation $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=1$. Etudions maintenant le signe de $2x^2-3x+1$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 4 –

Donc $\boxed{D_f =]-\infty, \frac{1}{2}] \bigcup [1, +\infty[}$

(c) On a : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{x^2-1}{2x-1} \geq 0 \quad et \quad 2x - 1 \neq 0 \right\}$. Etudions le signe de $\dfrac{x^2-1}{2x-1}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x2-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x2-1}{2x-1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

FIGURE 5 –

Donc $\boxed{S = [-1, \frac{1}{2}[\bigcup [1, +\infty[}$

(d) On a :

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad \sqrt{x} + 2 \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad \sqrt{x} \neq -2 \right\} \end{aligned}$$

donc $\boxed{D_f = [0, +\infty[}$

10 Limites de fonctions

10.1 Limites usuelles

10.1.1 Au voisinage de ∞

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

4. $\begin{cases} Si \quad n \quad est \quad pair, \quad alors \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty \\ \\ Si \quad n \quad est \quad impair, \quad alors \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty \end{cases}$

10.1.2 Au voisinage de 0

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
2. $\begin{cases} Si \quad n \quad est \quad pair, \quad alors \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \\ \\ Si \quad n \quad est \quad impair, \quad alors \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \end{cases}$

10.2 Limites de fonctions polynomes et rationnelles en un point a et en $+\infty$

Soient P et Q deux fonctions polynomes et a un réel.
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ avec $(a_n \neq 0)$

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x^1 + b_0$ avec $(b_m \neq 0)$

1. $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$
3. Si $Q(a) \neq 0$,alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(a)}{Q(a)}$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$

10.3 Limite de la fonction $\sqrt{f}$

Soit f une fonction positive et ℓ un réel positif :

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ avec $a \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

10.4 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions numériques et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ alors :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$
3. Si $\ell' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell}{\ell'}$

Forme indéterminées : $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

10.4.1 Limites du type $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(a) = g(a) = 0$ et $a \in \mathbb{R}$:

On factorise $f(x)$ et $g(x)$ par $(x-a)$ puis on simplifie :

$f(x) = (x-a) f_1(x)$ et $g(x) = (x-a) g_1(x)$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \quad si \quad g_1(a}$

Exemple 1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$
On a $x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1 = (x-1)(x^3 - x^2 + 1)$ et $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3 - x^2 + 1)}{(x-1)(x+2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x+2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

10.4.2 Cas avec $f(\ ou \ \ g\ )$ est de la forme $\sqrt{h} \pm k$:

Dans ce cas on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.

Exemple 2. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{1 - \sqrt{x}}$

On a

$$\begin{aligned}
\underset{x\to1}{lim}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-\sqrt{x}} &= \underset{x\to1}{lim}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} \\
&= \underset{x\to1}{lim}\frac{\left(3x+1-4\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} \\
&= \underset{x\to1}{lim}\frac{\left(3x-3\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{-\left(x-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} \\
&= \underset{x\to1}{lim}\frac{-3\left(x-1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} \\
&= \underset{x\to1}{lim}\frac{-3\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x+1}+2} \\
&= \frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}
\end{aligned}$$

10.4.3 Cas $\underset{x\to a}{lim}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}$

Si f est une fonction dérivable en a alors : $\boxed{\underset{x\to a}{lim}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=f'\left(a\right)}$

Exemple 3. Calculer $\underset{x\to-2}{lim}\frac{\left(3x+5\right)^{2023}+1}{x+2}$
La fonction $f:x\mapsto\left(3x+5\right)^{2023}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en -2 et on a $f\left(-2\right)=\left(-1\right)^{2023}=-1$, et

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),f'\left(x\right)=2023\left(3x+5\right)^{2023}\times3=6069\left(3x+5\right)^{2022}$$

On a $f'\left(-2\right)=6069\left(-1\right)^{2022}=6069$, donc

$$\underset{x\to-2}{lim}\frac{\left(3x+5\right)^{2023}+1}{x+2}=\underset{x\to-2}{lim}\frac{f\left(x\right)-f\left(-2\right)}{x-\left(-2\right)}=f'\left(-2\right)=6069$$

10.4.4 Limites usuelles de fonctions trigonométriques

Soit a un réel

1. $\underset{x\to a}{lim}sinx=sin\left(a\right)$
2. $\underset{x\to a}{lim}cosx=cos\left(a\right)$
3. $\underset{x\to a}{lim}tanx=tan\left(a\right)\quad si\quad a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad avec\quad k\in\mathbb{Z}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tanx}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

10.4.5 Type $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta\right)$ avec $a > 0$ et $\alpha \neq 0$

Comment factoriser par x l'expression $\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$?
Pour $x > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta &= \sqrt{x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)} + \alpha x + \beta \\
&= \sqrt{x^2}.\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right) \\
&= |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right) \\
&= \underbrace{x}_{|x|=x} \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right) \\
&= x\left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x}\right)
\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x}\right) = \sqrt{a} + \alpha$. On pose $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$

1. Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Si $\alpha < 0$, alors :
   (a) Si $\sqrt{a} + \alpha \neq 0$, alors factoriser par x.
   (b) Si $\sqrt{a} + \alpha = 0$, alors multiplier et diviser par le conjugué, puis factoriser par x au numérateur et au dénominateur (si nécessaire) puis simplifier par x.

Exemple 4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 3x + 2$
On a : $a = 1$ et $\alpha = -3$ donc $\alpha < 0$ et comme $\sqrt{a} + \alpha = -2 < 0$,il suffit de factoriser

par x :
on a

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-3x+2=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right)$$

et comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3+\frac{2}{x}=-2\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right)=$
$-\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-3x+2=-\infty$$

Exemple 5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x-1}-2x+5$
On a : $a=4$ et $\alpha=-2$ donc $\alpha<0$, et comme $\sqrt{a}+\alpha=0$, on utilise le conjuguée :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x-1}-2x+5&=\lim_{x\to+\infty}5+\sqrt{4x^2+3x-1}-2x\\&=\lim_{x\to+\infty}5+\frac{\left(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}\\&=\lim_{x\to+\infty}5+\frac{4x^2+3x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}\\&=\lim_{x\to+\infty}5+\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}\\&=\lim_{x\to+\infty}5+\frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\right)}\\&=\lim_{x\to+\infty}5+\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}\end{aligned}$$

et comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}3-\frac{1}{x}=3\\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2=4\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{3}{4}$ par suite

$$\lim_{x\to+\infty} 5+\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{23}{4} \text{ c'est-à-dire}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x-1}-2x+5=\frac{23}{4}$$

10.4.6 Type $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$ avec $a>0$ et $\alpha\neq 0$

Comment factoriser par x l'expression $\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$?
Pour $x<0$ on a

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta &= \sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\alpha x+\beta\\ &= \sqrt{x^2}.\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\\ &= |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\\ &= \underbrace{-x}_{|x|=-x}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\\ &= x\left(-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=-\sqrt{a}+\alpha$. On pose $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$

1. Si $\alpha<0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
2. Si $\alpha>0$, alors :
   (a) Si $-\sqrt{a}+\alpha\neq 0$, alors factoriser par x.
   (b) Si $-\sqrt{a}+\alpha=0$, alors multiplier et diviser par le conjugué, puis factoriser par x au numérateur et au dénominateur (si nécessaire) puis simplifier par x.

Exemple 6. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3x+1}+x-2$

On a : $a=2$ et $\alpha=1$ alors $\sqrt{a}+\alpha=-\sqrt{2}<0$, alors il suffit de factoriser par x donc

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-3x+1}+x-2 = \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right)$$

et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right) = -\sqrt{2}+1<0$

par suite $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right) = +\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-3x+1}+x-2 = +\infty$$

Exemple 7. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2-2}+3x-4$

FIN