Rappel et mise à niveau

1 BAC
EXP
SM

Yahya MATIOUI

20 août 2023

www.etude-generale.com

1 Les identités remarquables

1. $(a+b)^2 \underset{\overleftarrow{Factorisation}}{\overset{\overrightarrow{Développement}}{=}} a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$
4. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$
7. $a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

2 Les fractions

a, b et c sont des nombres réels.

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$ (condition : $b\neq 0$ et $d\neq 0$)
2. $\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0$ (condition : $b\neq 0$)
3. $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ (condition : $b\neq 0$)
4. $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{cb}{bd}=\frac{ad\pm cb}{bd}$ (condition : $b\neq 0$ et $d\neq 0$)
5. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (condition : $b\neq 0$ et $d\neq 0$)

6. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
7. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)
8. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ (condition : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$)

Exemple 1. Calculer :

$$A = \left(3 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{3}\right) + \left(6 - \frac{2}{15}\right)\left(4 - \frac{7}{5} + \frac{2}{3}\right) \quad et \quad B = \frac{2 + \frac{1}{4}}{3 - \frac{1}{4}} \times \frac{1 + \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} - 2} \times \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{2 - \frac{1}{6}}$$

1. On a

$$\begin{aligned}
A &= \left(3 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{3}\right) + \left(6 - \frac{2}{15}\right)\left(4 - \frac{7}{5} + \frac{2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{3 \times 15}{1 \times 15} - \frac{1 \times 3}{5 \times 3} - \frac{4 \times 5}{3 \times 5}\right) \times \frac{15}{3} + \left(\frac{6 \times 15}{15} - \frac{2}{15}\right)\left(\frac{4 \times 15}{15} - \frac{7 \times 3}{5 \times 3} + \frac{2 \times 5}{3 \times 5}\right) \\
&= \left(\frac{45}{15} - \frac{3}{15} - \frac{20}{15}\right) \times \frac{15}{3} + \left(\frac{90}{15} - \frac{2}{15}\right)\left(\frac{60}{15} - \frac{21}{15} + \frac{10}{15}\right) \\
&= \frac{22}{15} \times \frac{15}{3} + \frac{88}{15} \times \frac{49}{15} \\
&= \frac{22}{3} + \frac{4312}{225} \\
&= \frac{22 \times 75}{225} + \frac{4312}{225} \\
&= \frac{5962}{225}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2+\frac{1}{4}}{3-\frac{1}{4}} \times \frac{1+\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}-2} \times \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{2-\frac{1}{6}} \\
&= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{11}{4}} \times \frac{\frac{7}{5}}{\frac{-6}{5}} \times \frac{\frac{3}{6}}{\frac{11}{6}} \\
&= \frac{9}{4} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{5} \times \frac{5}{-6} \times \frac{3}{6} \times \frac{6}{11} \\
&= \frac{9 \times 7 \times 3}{11 \times (-6) \times 11} \\
&= \frac{9 \times 7}{-242} \\
&= -\frac{63}{242}
\end{aligned}$$

3 Les puissances

1. $\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \quad fois} = a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a^1 = a$. (Attention : $\underbrace{a + a + ... + a}_{n \quad fois} = na$)
2. Pour tout réel non nul, on a $a^0 = 1$.
3. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{n \times m}$, $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ et $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemple 2. .Simplifier en utilisant les propriétés des puissances le nombre A tel que :
$A = \dfrac{\left(3^2 \times 11^5\right)^{-2}}{\left(3^4 \times 11^2\right)^3} \times \dfrac{33^{15}}{3^2 \times 11^{-1}}$
On a

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\left(3^2 \times 11^5\right)^{-2}}{\left(3^4 \times 11^2\right)^3} \times \frac{33^{15}}{3^2 \times 11^{-1}} \\
&= \frac{\left(3^2\right)^{-2} \times \left(11^5\right)^{-2}}{\left(3^4\right)^3 \times \left(11^2\right)^3} \times \frac{(3 \times 11)^{15}}{3^2 \times 11^{-1}} \\
&= \frac{3^{-4} \times 11^{-10}}{3^{12} \times 11^6} \times \frac{3^{15} \times 11^{15}}{3^2 \times 11^{-1}} \\
&= \frac{3^{-4+15} \times 11^{-10+15}}{3^{12+2} \times 11^{6-1}} \\
&= \frac{3^{11} \times 11^5}{3^{14} \times 11^5} \\
&= \frac{1}{3^3} \\
&= \frac{1}{27}
\end{aligned}
$$

Exemple 3. Montrer que pour tout m et n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{2^n}{5^m} \in ID$.

On a l'ensemble des nombres décimaux est noté ID. Tel que : $ID = \left\{ \dfrac{a}{10^n} / \ a \in \mathbb{Z} \ \ et \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$

On a : $\dfrac{2^n}{5^m} = \dfrac{2^n \times 2^m}{5^m \times 2^m} = \dfrac{2^{n+m}}{10^m}$

et comme n et m sont deux entiers naturels alors $2^{n+m} \in \mathbb{N}$, par suite $\dfrac{2^{n+m}}{10^m} \in ID$,

donc pour tout m et n de $\mathbb{N}$, on a $\dfrac{2^n}{5^m} \in ID$.

4 Les racines carrées

Soit a un réel positif. On appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif b tel que : $b^2 = a$ (et on écrit : $b = \sqrt{a}$).

1. $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)
3. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (condition : $a \geq 0$ et $b > 0$)
4. $\begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b \\ \\ \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \end{cases}$ (condition : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)

5. Si $a > 0$, alors $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

6. .

   (a) Le conjugué de $\sqrt{A}+B$ est $\sqrt{A}-B$ et on a $\left(\sqrt{A} + B = \dfrac{\left(\sqrt{A}+B\right)\left(\sqrt{A}-B\right)}{\sqrt{A}-B}\right)$

   (b) Le conjugué de $\sqrt{x^2-2x+3} - x + 2$ est $\sqrt{x^2-2x+3} + x - 2$.

Exemple 4. .

1. Montrer que : $\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} + \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} \in \mathbb{Z}$

2. Soit x un réel tel que $x > 1$. On pose : $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

   Montrer que : $A - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$

— L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. Tel que :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

— On a

$$\begin{aligned}
\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} &= \frac{5\sqrt{7}\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)}{2-7} + \frac{5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{2-7} \\
&= 5\left(\frac{\sqrt{14}+7+2-\sqrt{14}}{-5}\right) \\
&= -9
\end{aligned}$$

et comme $-9 \in \mathbb{Z}$, donc $\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} + \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} \in \mathbb{Z}$.

— Soit x un réel tel que $x > 1$, on a

$$
\begin{aligned}
A-1 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-1 \\
&= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{x-(x-1)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}
\end{aligned}
$$

Exemple 5. On considère le nombre réel tel que : $A = \sqrt{2}-\sqrt{3}$
Montrer que A est solution de l'équation : $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
On a

$$
\begin{aligned}
A^4 - 10A^2 + 1 &= \left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2\right]^2 - 10\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 + 1 \\
&= \left(2-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+3\right)^2 - 10\left(2-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+3\right) + 1 \\
&= \left(5-2\sqrt{6}\right)^2 - 10\left(5-2\sqrt{6}\right) + 1 \\
&= \left(25-20\sqrt{6}+24\right) - 50 + 20\sqrt{6} + 1 \\
&= 25+24+1-50-20\sqrt{6}+20\sqrt{6} \\
&= 50-50 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Donc A est solution de l'équation $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

5 Signe de $ax+b$ - inéquation (avec produit ou quotient)

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$signe(-a)$	0	$signe(a)$	

FIGURE 1 –

Pour résoudre des inéquations « produit » $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ ou « quotient » $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ on utilise un tableau de signe.

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x+1)(x+2)(-2x+3) < 0$.

   On a $\begin{cases} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \\ x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \\ -2x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

FIGURE 2 –

   Donc $S =]-2,-1[\bigcup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{5x-2}{1+3x} \leq 0$

   L'expression $\dfrac{5x-2}{1+3x}$ existe si et seulement si $1+3x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \dfrac{-1}{3}$.

   On a $\begin{cases} 5x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5} \\ \\ 1+3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$ par suite

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

FIGURE 3 –

donc $S =]\frac{-1}{3}, \frac{2}{5}]$

6 Valeur absolue

Soient x, y, a, b et r sont des réels

1. $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}), |x| \geq 0$
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
5. Si $a \geq 0$, alors $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
6. $|a \times b| = |a| \times |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$ et $|a^n| = |a|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$ (condition : $r \geq 0$)
8. $|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r$ ou $x \leq -r$ (condition : $r \geq 0$)
9. $x^2 \leq r \Leftrightarrow -\sqrt{r} \leq x \leq \sqrt{r}$ (condition : $r \geq 0$)
10. $x^2 \geq r \Leftrightarrow x \geq \sqrt{r}$ ou $x \leq -\sqrt{r}$ (condition : $r \geq 0$)

Exemple 6. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : 3 - 2|x - 4| = 2x + 5$
Étudions le signe du binôme $x - 4$:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

FIGURE 4 –

— Si $x \in]-\infty, 4]$, alors $|x-4| = -(x-4)$ donc

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 3-2\left[-(x-4)\right] = 2x+5\\ &\Leftrightarrow 3+2(x-4) = 2x+5\\ &\Leftrightarrow 3+2x-8 = 2x+5\\ &\Leftrightarrow 2x-2x = 5+8-3\\ &\Leftrightarrow 0 = 10 \quad (impossible)\end{aligned}$$

par suite $S_1 = \phi$.

— Si $x \in [4, +\infty[$, alors $|x-4| = x-4$ donc

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 3-2(x-4) = 2x+5\\ &\Leftrightarrow 3-2x+8 = 2x+5\\ &\Leftrightarrow -2x-2x = 5-8-3\\ &\Leftrightarrow -4x = -6\\ &\Leftrightarrow x = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

et comme $\frac{3}{2} \notin [4, +\infty[$, donc $S_2 = \phi$

D'ou l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = S_1 \bigcup S_2 = \phi$.

Exemple 7. Trouver les réels x satisfaisant à la condition indiquée : $\frac{1}{2} \leq \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$,on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leq \left|x-\frac{1}{2}\right| < 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x-\frac{1}{2} < 2 \ ou \ \ \frac{1}{2} \leq -\left(x-\frac{1}{2}\right) < 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \leq x < 2+\frac{1}{2} \ ou \ \ \frac{1}{2} \leq -x+\frac{1}{2} < 2 \\
&\Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{5}{2} \ ou \ \ \frac{1}{2} \leq -x+\frac{1}{2} < 2 \\
&\Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{5}{2} \ ou \ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \leq -x < 2-\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x \in [1,\frac{5}{2}[\ ou \ \ 0 \leq -x < \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow x \in [1,\frac{5}{2}[\ ou \ \ -\frac{3}{2} < x \leq 0 \\
&\Leftrightarrow x \in [1,\frac{5}{2}[\ ou \ \ x \in]\frac{-3}{2},0] \\
&\Leftrightarrow x \in]\frac{-3}{2},0]\bigcup[1,\frac{5}{2}[\end{aligned}$$

Exemple 8. Soient a et b deux réels tels que : $b \in [-3,-1]$ et $a \in [-2,5]$.
Simplifier : $A = 2\,|2a+7| - |3b| + 2\,|b+8| - |2b-a|$

7 Le second degré ax^2+bx+c avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$

1. Comment résoudre une équation du second degré (E) : $ax^2+bx+c=0$? $(a \neq 0)$

   (a) Méthode classique : calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$

      i. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

      ii. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

      iii. Si $\Delta < 0$, alors $S = \phi$.

   (b) Autres méthodes et astuces : Forme canonique $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$ puis factoriser si possible ...

(c) Si $c = 0$ alors

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax + b\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou x = \frac{-b}{a}$$

(Donc si $c = 0$ alors 0 et $\frac{-b}{a}$ sont les solutions de (E)).

2. Comment déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$?

(a) Commencer par calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

i. Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$

ii. Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq \frac{-b}{2a}$

iii. Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe contraire de a entre les racines.

Exemple 9. .

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $(E) : x^2 - 3x + 2 = 0$ et $(E') : x^2 + 3x + 4 = 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :

$$(I) : \left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 + 3x + 4\right) < 0$$

— Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations $(E) : x^2 - 3x + 2 = 0$ et $(E') : x^2 + 3x + 4 = 0$.

— On a : $a = 1$,$b = -3$ et $c = 2$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$, donc l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{1, 2\}$.

— On a : $a = 1$,$b = 3$ et $c = 4$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$, donc l'équation (E') n'admet pas des solutions réelles dans $\mathbb{R}$.
Donc $S = \phi$.

— Déduisons dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$(I) : \left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 + 3x + 4\right) < 0$$

— Le signe de $\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 + 3x + 4\right)$ dépend du signe des trinômes $\left(x^2 - 3x + 2\right)$ *et* $\left(x^2 + 3x + 4\right)$. Donc on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x2{+}3x{+}4$		+	|	+	|	+	
$x2{-}3x{+}2$		+	0	$-$	0	+	
Produit		+	0	$-$	0	+	

FIGURE 5 –

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$$S =]1, 2[$$

8 Signe d'expression avec racines carrées

1. Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - B$? (avec $A \geq 0$ et $B \neq 0$)
   (a) Si $B < 0$, alors $-B > 0$ et $\sqrt{A} \geq 0$, donc $\sqrt{A} - B > 0$
   (b) Si $B > 0$, on multiplie et on divise par le conjugué $\sqrt{A} + B$:
   $$\sqrt{A} - B = \frac{\left(\sqrt{A} - B\right)\left(\sqrt{A} + B\right)}{\sqrt{A} + B} = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$
   alors le signe de $\sqrt{A} - B$ est celui de $A - B^2$.
2. Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$? (avec $A \geq 0$ et $B \geq 0$)
   On a :
   $$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$
   Donc le signe de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ est celui de $A - B$.

9 Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \ \ existe \ \right\}$$

Techniques pour chercher l'ensemble de définition d'une fonction

Soient P et Q deux fonctions polynômes et f une fonction numérique.

Expression de la fonction f	Détermination de D_f
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \ et \ \ Q(x) \neq 0 \ \right\}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\underset{a>0}{\sqrt{Q(x)} - a}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / Q(x) \geq 0 \ et \ \ \sqrt{Q(x)} - a \neq 0 \ \right\}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f :

$$f(x)=\frac{|x|(x+1)}{x(2x^2+x-3)},\ \ f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1},\ \ f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{2x-1}},\ \ f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

(a) On a : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\left(2x^2+x-3\right)\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0 \quad ou \quad 2x^2+x-3\neq 0\right\}$
Le discriminant de l'équation $2x^2+x-3=0$ est $\Delta=25$ donc les solutions de l'équation sont $x_1=1$ et $x_2=\frac{-3}{2}$, donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-3}{2},0,1\right\}}$

(b) On a : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1>0\right\}$
L'équation $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=1$. Étudions maintenant le signe de $2x^2-3x+1$:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

FIGURE 6 –

Donc $\boxed{D_f=]-\infty,\frac{1}{2}]\bigcup[1,+\infty[}$

(c) On a : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{2x-1}\geq 0 \quad et \quad 2x-1\neq 0\right\}$. Étudions le signe de $\frac{x^2-1}{2x-1}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x2-1}{2x-1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

FIGURE 7 –

Donc $\boxed{S=[-1,\frac{1}{2}[\bigcup[1,+\infty[}$

(d) On a :

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad \sqrt{x} + 2 \neq 0 \ \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad \sqrt{x} \neq -2 \ \right\} \end{aligned}$$

donc $\boxed{D_f = [0, +\infty[}$

FIN