Série d'exercices sur les nombres complexes

2 BAC
PC
SVT

Yahya MATIOUI

12 août 2023

Exercice 1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b = 1+\sqrt{2}+i$, $c = \overline{b}$ et $d = 2i$.

1. Ecrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.
2. .
   (a) Vérifier que : $b - d = c$
   (b) Montrer que : $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a) = b-d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.
3. .
   (a) Vérifier que : $ac = 2b$.
   (b) En déduire que $2\arg(b) \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$
4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.
   (a) Montrer que $z' = \dfrac{1}{2}az$
   (b) En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$
   (c) Montrer que $\dfrac{b-a}{c-a} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$.

Exercice 2. .

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$(E) : z^2 - 2z + 4 = 0$$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}i$.
   (a) Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}\,(c - d)$.
   (b) En déduire que les points A, C et D sont alignés.
3. On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$. Vérifier que : $z' = \dfrac{1}{2}az$
4. Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$.
   (a) Vérifier que : $h = ip$
   (b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3. .

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.
2. On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$.
   (a) Montrer que : $\dfrac{a - \omega}{b - \omega} = i$.
   (b) En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.
3. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Montrer que : $z' = iz + 1 - i$
   (b) Vérifier que : $R\,(A) = C$ et $R\,(D) = B$.
   (c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au meme cercle dont on déterminera le centre.

Exercice 4. .

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.
2. Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(a) Ecrire a sous forme algébrique.

(b) Vérifier que $\overline{a}b = \sqrt{3}$

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\overline{a}$.

   (a) Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4. Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   (a) Ecrire z' en fonction de z et a.

   (b) Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que : $d = a + 1$.

   (c) Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est un losange.

5. .

   (a) Vérifier que : $d - b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$, en déduire un argument du nombre $d - b$.

   (b) Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

   (c) Déduire une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}\right)$.

Exercice 5. .

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)z + 16 = 0$$

   (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$

   (b) En déduire les solutions de l'équation (E).

2. Soient les nombres complexes $a = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

   (a) Vérifier que $b\overline{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.

   (b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique

   (c) En déduire que : $a = 4\left(cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + isin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points B,C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$. Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

   (a) Vérifier que $z' = \dfrac{1}{4}az$

   (b) Déterminer l'image du point C par la rotation R.

   (c) Déterminer la nature du triangle OBC

   (d) Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

FIN