LES SUITES

TS

Yahya MATIOUI

1^er^ août 2023

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Effet domino

Le raisonnement par récurrence repose sur le même principe que la théorie des dominos :

On considère une suite de dominos. Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Comme le 1^{er} tombe alors le second tombera, puis le troisième etc .....

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

1. Prouver que le premier domino tombe.
2. Démontrer que si le nième domino tombe alors le suivant (le $n+1$ ième domino) tombera...

Si on démontre ces deux points alors la réaction en chaîne se déclenche et tous les dominos tomberont ! !

Transposons cet effet domino à une propriété mathématique.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par : $u_0 = 0,4$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$.

Soit la propriété : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < 1.$

— Le premier domino tombe :

$u_0 = 0,4$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété est amorcée.

— Si l'un des dominos tombe le suivant tombe également

$$0 < u_n < 1 \overset{\times\frac{1}{2}}{\Rightarrow} 0 < \frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2} \overset{+\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} < 1$$

On a ainsi $0 < \frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$. La propriété se propage.

Comme le premier domino est tombé et que les autres tombent par propagation, tous les dominos tombent et donc la propriété est bien vérifiée pour tout entier naturel.

1.2 Axiome de récurrence

Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé on procède en trois étapes :

1. Première étape : On vérifie que (P_{n_0}) est vraie. C'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice $n = n_0$.
2. Deuxième étape : On suppose que pour un entier quelconque $(n \geq n_0)$, la proposition (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse, dite de récurrence, on démontre qu'alors la proposition (P_{n+1}) est vraie. On dit alors que la proposition est héréditaire.
3. Troisième étape : Lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut que la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n $(n \geq n_0)$.

Exemple 1. Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 2^n > n$.

— Initialisation pour $n = 1$, on a $2^1 > 1$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
— Hérédité :
  — Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie : $2^n > n$.
  — Démontrons que : La propriété est vraie au rang $n + 1$, soit $2^{n+1} > n + 1$.
    — On a $2^n > n$ (hypothèse de récurrence) alors $2 \times 2^n > 2 \times n$ c'est-à-dire $2^{n+1} > 2n$ et comme $2n > n + 1$ donc $2^{n+1} > n + 1$.
  — Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul, soit :

$$2^n > n.$$

Exemple 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = u_n + 2n + 3$
Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = (n + 1)^2$.

— Initialisation pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et comme $(0 + 1)^2 = 1$ alors $u_0 = (0 + 1)^2$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
— Hérédité :
  — Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie : $u_n = (n + 1)^2$.
  — Démontrons que : La propriété est vraie au rang $n+1$, soit $u_{n+1} = (n + 2)^2$.

— On a

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \longrightarrow (\ par \ \ définition) \\
&= \underbrace{(n+1)^2}_{hypothèse \ \ de \ \ récurrence} + 2n + 3 \\
&= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\
&= n^2 + 4n + 4 \\
&= (n+2)^2
\end{aligned}
$$

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$u_n = (n+1)^2 \,.$$

Exemple 3. Démontrer par récurrence que : $(\forall \in \mathbb{N})\,, 4^n + 5$ est un multiple de 3.

— Initialisation pour $n = 0$, on a $4^0 + 5 = 6$ et 6 est bien un multiple de 3. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

— Hérédité :

— Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie : $4^n + 5$ est un multiple de 3. Cela veut dire qu'il existe un entier naturel k tel que : $4^n + 5 = 3k$.

— Démontrons que : La propriété est vraie au rang $n+1$, soit $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3.

— On a

$$
\begin{aligned}
4^{n+1} + 5 &= 4^n \times 4 + 5 \\
&= 4^n \times \left(\underbrace{3+1}_{décomposition} \right) + 5 \\
&= 4^n \times 3 + 4^n + 5 \\
&= 4^n \times 3 + \underbrace{3k}_{hypothèse} \\
&= 3\left(4^n + k\right)
\end{aligned}
$$

et comme $(4^n + k) \in \mathbb{N}$, on pose $k' = 4^n + k$ donc $4^{n+1} + 5 = 3k'$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $4^n + 5$ est un multiple de 3.

1.3 Inégalité de Bernoulli

Proposition 1. *Soit un nombre réel a positif .*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (1+a)^n \geq 1+na.$$

Démonstration. :

–Initialisation : On a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ alors $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$. La propriété est vraie pour $n=0$.

–Hérédité :

□

Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie :

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Démontrons que : la propriété est vraie au range $n+1$, soit $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

On a : $\underbrace{(1+a)^n \geq 1+na}_{\text{hypothèse de récurrence}}$ alors $(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$,

c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na)$.

Il suffit de montrer que : $(1+a)(1+na) \geq 1+(n+1)a$.

On a

$$\begin{aligned}(1+a)(1+na) - (1+(n+1)a) &= 1+na+a+na^2-1-(n+1)a \\ &= na+a+na^2-na-a \\ &= na^2\end{aligned}$$

et comme $na^2 \geq 0$ alors $(1+a)(1+na)-(1+(n+1)a) \geq 0$ par suite

$$(1+a)(1+na) \geq 1+(n+1)a$$

alors $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

–Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}), (1+a)^n \geq 1+na$.

2 Limite d'une suite

2.1 Limite infinie

Définition 1. :

1. On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un rang donné n_0. On note alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

2. On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty, b[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un rang donné n_0. On note alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty.$$

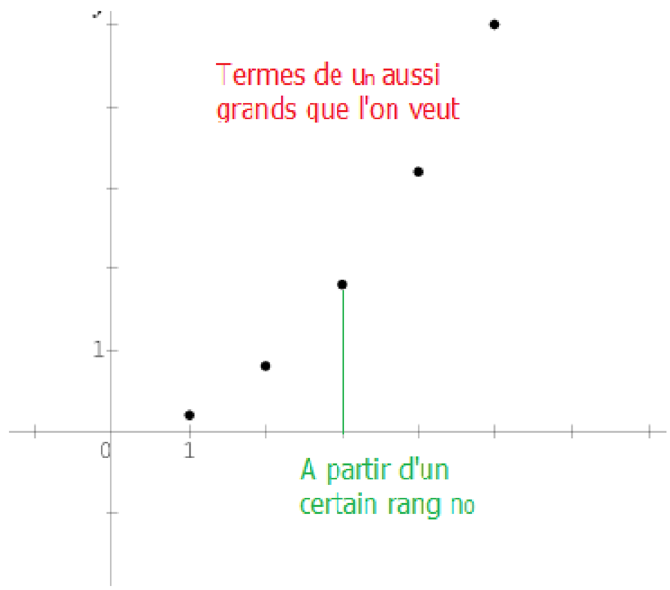

FIGURE 1 –

2.2 Limite finie

Définition 2. On dit qu'une suite (u_n) tend (ou converge) vers un réel ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient également tous les termes de la suite à partir d'un rang donné n_0. On écrit alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Si une suite n'est pas convergente est alors dite divergente.

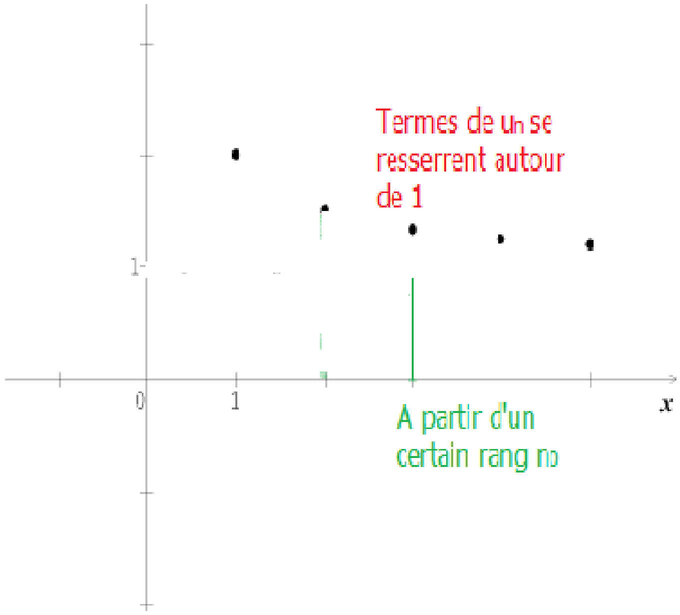

Figure 2 –

Remarque 1. Une suite peut être divergente pour plusieurs raisons : elle n'a pas de limite ou elle tend vers $\pm\infty$.

2.3 Limites des suites usuelles

Proposition 2. :

$$1)\quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad 2)\quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad 3)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$4)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad 5)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad 6)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Démonstration. Admis

□

Proposition 3. *Si une suite* (u_n) *converge alors sa limite est unique.*

Démonstration. Admis

□

3 Opérations sur les limites

3.1 Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

Dans les trois tableaux suivants, FI (Forme Indéterminée) signifie qu'il est impossible de prévoir la limite associée. Le résultat dépend des suites (u_n) et (v_n) .

3.1.1 Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

3.1.2 Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

3.1.3 Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	0	∞	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	FI	FI

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple 4. Calculer les limites :

$$1)\quad \lim_{n\to+\infty} n^2+n \quad 2) \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3) \quad 3) \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{-n^4+1}$$

1. On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{cases}$ alors d'après la propriété donnant la limite de la somme :
$$\lim_{n\to+\infty} n^2+n = +\infty$$
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}+1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty \end{cases}$ alors d'après la propriété donnant la limite d'un produit :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3) = +\infty$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^4 = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^4+1 = -\infty$ donc d'après la propriété donnant la limite d'un quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^4+1} = 0.$$

Les quatre **forme indéterminées** sont par abus d'écriture : "$\infty - \infty$", "$\mathbf{0} \times \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$"

Exemple 5. Calculer les limites :

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} n^2 - 4\sqrt{n} \quad 2)\ \lim_{n\to+\infty} n^2 - 6n + 5 \quad 3)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+5n}$$

1. On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 4\sqrt{n} = +\infty \end{cases}$ alors il s'agit d'une forme indéterminée "$\infty - \infty$".

   Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^2 - 4\sqrt{n} &= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{4\sqrt{n}}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{4\sqrt{n}}{n \times n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n^2} \times n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{4}{n \times \sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

   et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n\sqrt{n}} = 0$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{4}{n\sqrt{n}} = 1 \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{cases}$ donc d'après la propriété donnant la limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{4}{n\sqrt{n}}\right) = +\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 4\sqrt{n} = +\infty$$

2. On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -6n+5 = -\infty \end{cases}$ alors il s'agit d'une forme indéterminée "$\infty -$

∞". Donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 6n + 5 = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{6n}{n^2} + \frac{5}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2} = 1$. Par suite $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \\ \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2} = 1 \end{cases}$ d'ou $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty$. C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 6n + 5 = +\infty$$

3. On a $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} 5n^2 + 4 = +\infty \\ \\ \lim_{n\to+\infty} 4n^2 + 5n = +\infty \end{cases}$ alors il s'agit d'une forme indéterminée "$\frac{+\infty}{+\infty}$".
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 5n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(5 + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4 + \frac{5n}{n^2}\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{5}{n}}$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ alors $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5 \\ \\ \lim_{n\to+\infty} 4 + \frac{5}{n} = 4 \end{cases}$ donc d'après la propriété donnant la limite d'un quotient : $\lim_{n\to+\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{5}{n}} = \frac{5}{4}$. C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 5n} = \frac{5}{4}.$$

Exemple 6. Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{cases}$ alors il s'agit d'une forme indéterminée "$\infty-\infty$".

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$, donc d'après la propriété donnant la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$. Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0.$$

4 Limites et comparaison

4.1 Théorème de comparaison

Théorème 1. *On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n).*

Si à partir d'un certain rang, on a $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$

Si à partir d'un certain rang, on a $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$

Démonstration. On considère un intervalle $]a,+\infty[$ avec a est un réel.

On veut montrer que cet intervalle contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_0.

On a (v_n) tend vers $+\infty$ donc il existe un rang n_1 à partir duquel $v_n > a$. On a de plus $u_n \geq v_n$ à partir du rang n_2.

Posons n_0 le plus grand des deux entiers n_1 et n_2. A partir de ce rang n_0 on a donc $u_n \geq v_n > a$. Par conséquent (u_n) tend vers $+\infty$.

On montre de la même façon la deuxième partie de ce théorème.

□

Exemple 7. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$:

On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ alors $n^2-1 \leq n^2+(-1)^n \leq n^2+1$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-1 = +\infty$. Donc d'après le <u>théorème de comparaison</u> on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty.$$

4.2 <u>Théorème d'encadrement</u>

Théorème 2. *On considère trois suites (u_n), (v_n) et (ω_n) définies pour tout entier naturel n telles que $u_n \leq v_n \leq \omega_n$ à partir d'un certain rang.*

$$\text{Si} \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Démonstration. :

On considère un intervalle ouvert I contenant ℓ.

La suite (u_n) converge vers ℓ. Soit n_1 le rang à partir duquel I contient tous les termes de la suite (u_n).

La suite (ω_n) converge vers ℓ. Soit n_2 le rang à partir duquel I contient tous les termes de la suite (ω_n).

A partir du rang n_3 on a $u_n \leq v_n \leq \omega_n$.

On appelle n_0 le maximum des entiers n_1, n_2 et n_3. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, I contient tous les termes des suites (u_n) et (v_n) et on a $u_n \leq v_n \leq \omega_n$.

Cela signifie donc que l'intervalle I contient

également tous les termes de la suite (v_n). Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

□

Exemple 8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,, u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$on a $-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \dfrac{-1}{n^2} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$. Or $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0 \\ \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$

donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemple 9. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n = 1 + \dfrac{\sin n}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$on a $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$, par suite

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), 1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1 \\ \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1 \end{cases}$ donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Remarque 2. :

1. On utilise le théorème de comparaison pour démontrer une limite infinie et le théorème d'encadrement pour une limite finie
2. Ce théorème est également appelé le le théorème des gendarmes.

5 Suites majorées, Suites minorées, bornées

5.1 Définitions

Définition 3. :

1. La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq M$.
2. La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq m$.
3. La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque 3. Le majorant ou le minorant n'est pas unique. En effet si 2 majore la suite (u_n) alors tout réel supérieur à 2 majore aussi (u_n).

Exemple 10. Montrons que la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ est majorée par 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_n - 3 &= \frac{3n+1}{n+1} - 3 \\ &= \frac{3n+1-3(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{3n+1-3n-3}{n+1} \\ &= \frac{-2}{n+1} \end{aligned}$$

et comme $\frac{-2}{n+1} < 0$ alors $u_n - 3 < 0$, donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n < 3.$$

Par suite la suite (u_n) est majorée par 3.

Exemple 11. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad et \quad (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et comme $u_0 < 3$ alors la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité :
  - Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie : $u_n < 3$.
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} < 3$.
    - On a $u_n < 3$ alors $\frac{1}{3}u_n < \frac{1}{3} \times 3$ donc $\frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2$ c'est-à-dire $u_{n+1} < 3$.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence on déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n < 3.$$

5.2 Convergence des suites monotones

Proposition 4. *On considère une suite (u_n) croissante.*
Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors la suite (u_n) est majorée par ℓ .

Démonstration. Admis

□

Théorème 3. *(Théorème de convergence monotone)*

- *Si (u_n) est croissante et majorée alors elle converge.*
- *Si (u_n) est décroissante et minorée alors elle converge.*

Démonstration. Admis. □

Exemple 12. On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 - \dfrac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{1}{n+2} - \left(3 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{n+2} - 3 + \frac{1}{n+1} \\ &= -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{-(n+1) + n + 2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-n - 1 + n + 2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

et comme $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

De plus on a : $u_n - 3 = -\dfrac{1}{n+1} < 0$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n < 3$. Elle est donc majorée par 3.

La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge.

Remarque 4. :

1. Le majorant ou le minorant n'est pas nécessairement la limite de la suite.
2. Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite. On peut seulement dire que, si (u_n) est croissante et majorée par M alors $\ell \leq M$ et si (u_n) est décroissante et minorée par m alors $\ell \geq m$.

Théorème 4. *On considère une suite (u_n).*

- *Si (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration. Soit un réel a.

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > a$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > n_0$ on a $u_n > u_{n_0}$. Donc pour tout $n > n_0$, on a $u_n > a$.

Et donc à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a, +\infty[$. On en déduit que : $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = +\infty$.

Une démonstration analogue est valable pour le deuxième point.

□

Exemple 13. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

On a $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Montrons que par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq n^2$.

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et comme $u_0 \geq 0$ alors la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité :

  — Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie : $u_n \geq n^2$.

  — Démontrons que : La propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire

$$u_{n+1} \geq (n+1)^2 .$$

  — On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - (n+1)^2 &= u_n + 2n + 3 - (n+1)^2 \\ &= u_n + 2n + 3 - \left(n^2 + 2n + 1\right) \\ &= u_n + 2n + 3 - n^2 - 2n - 1 \\ &= u_n - n^2 + 2 \end{aligned}$$

  et comme $u_n \geq n^2$alors $u_n - n^2 \geq 0$ par suite $u_n - n^2 + 2 \geq 2 \geq 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geq (n+1)^2$.

— Conclusion : D'après le principe de récurrence on déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq n^2.$$

Donc la suite(u_n) n'est pas majorée. D'ou la suite (u_n) est croissante et non majorée, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est diverge donc vers $+\infty$.

Remarque 5. La réciproque de ce théorème est fausse, si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

6 Limites de suites arithmétiques et géométriques

6.1 Suites arithmétiques

Proposition 5. *On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r.*

1. *Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*
2. *Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration. Pour tous entiers naturels n, on a $u_n = u_0 + nr$
–Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 + nr = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
–Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 + nr = -\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

□

Remarque 6. Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

6.2 Suites géométriques

6.2.1 Rappel

Proposition 6. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors, pour tout entier naturel n, on a :*

— $u_{n+1} = q \times u_n$ *(forme de récurrence)*
— $u_n = u_0 \times q^n$ *(forme explicite)*

6.2.2 Limites

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration. On a $(\forall n \in \mathbb{N}), (1 + a)^n \geq 1 + na$ (inégalité de Bernoulli).
On supposer que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$. Donc

$$q^n \geq 1 + na$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ $(a > 0)$. Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

□

Remarque 7. Pour $-1 < q < 1$ et $q \neq 0$, on peut poser $q' = \dfrac{1}{|q|}$, donc $q' > 1$. On revient alors à la première limite et l'on conclut avec le quotient sur les limites.

Exemple 14. Déterminer si elles existent les limites suivantes :

$$1) \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \quad 2) \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 3) \lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3} \quad 4) \lim_{n\to+\infty} 2^n - 3^n$$

1. On a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec $-1 < \frac{2}{3} < 1$.
2. On a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ avec $\frac{3}{2} > 1$.
3. On a $((-2)^n)$ est une suite géométrique de raison -2 inférieure à -1. Donc $((-2)^n)$ ne possède pas de limite. D'ou $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.
4. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} 2^n - 3^n &= \lim_{n\to+\infty} 2^n \left(1 - \frac{3^n}{2^n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2^n \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\end{aligned}$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$ donc $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty \end{cases}$

d'ou $\lim_{n\to+\infty} 2^n \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = -\infty$. Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n - 3^n = -\infty.$$

FIN