Fonction Logarithme Népérien

TS

Yahya MATIOUI

29 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition de la fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait de plus que : $\underset{x\to-\infty}{lim} e^x = 0$ et $\underset{x\to+\infty}{lim} e^x = +\infty$. Par conséquent d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), pour tous réels b strictement positifs, il existe un unique réel a tel que : $e^a = b$.

Définition 1. On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.

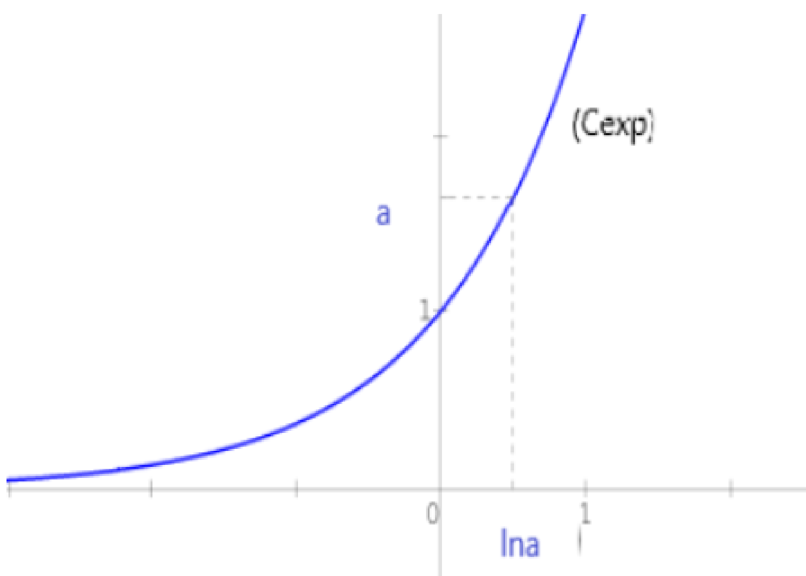

FIGURE 1 –

La fonction logarithme népérien notée ln, est la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par $x \mapsto \ln x$.

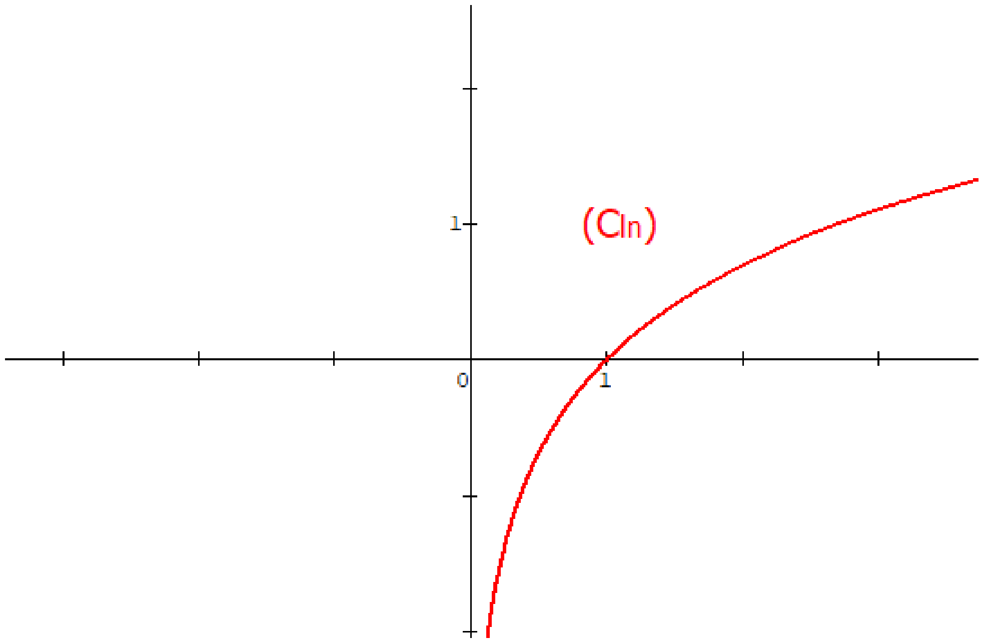

FIGURE 2 –

Remarque 1. On dit alors que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Les courbes représentant la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

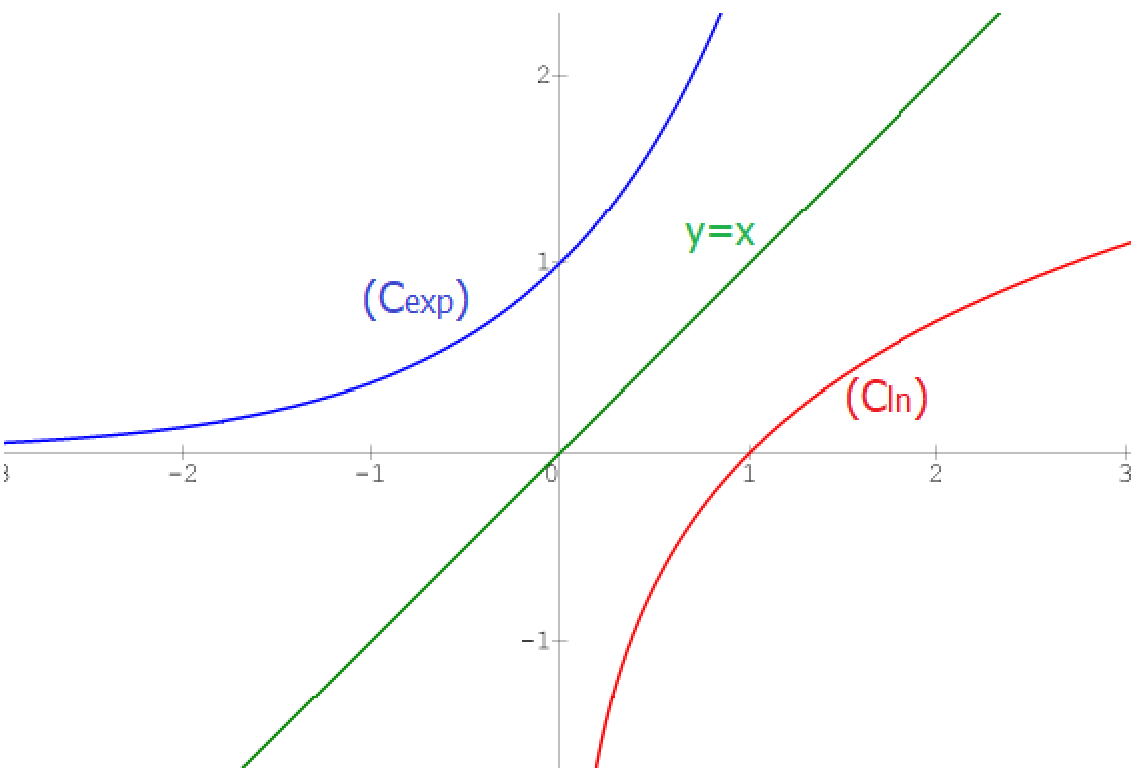

FIGURE 3 –

La définition de la fonction logarithme népérien permet de fournir la propriété suivante.

Proposition 1. :

1. *La fonction* $\ln$ *est définie et continue sur* $]0,+\infty[$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}), \ln(e^x) = x$
3. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
4. $(\forall x > 0), e^{\ln x} = x$.

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

2.1 Relation fonctionnelle

Théorème 1. *On considère deux réels a et b strictement positifs.*

$$ln(a \times b) = lna + lnb$$

Démonstration. On sait que pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$e^{lna} = a \quad , \quad e^{lnb} = b \quad et \quad e^{ln(ab)} = ab$$

Ainsi $a \times b = ab \Leftrightarrow e^{lna} \times e^{lnb} = e^{ln(ab)}$.

D'après les propriétés algébrique de la fonction exponentielle on a $e^{lna} \times e^{lnb} = e^{lna+lnb}$.
Par suite

$$e^{lna+lnb} = e^{ln(ab)}$$

donc $ln(a \times b) = lna + lnb$.

□

2.2 Conséquences

Corollaire 1. *Pours tous réels x et y strictement positifs, on a :*

1. $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$
2. $ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$
3. $ln(x^n) = nlnx$, avec n entier relatif.
4. $ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}lnx$.

Démonstration. : □

1. On considère un réel x strictement positif, on a $\frac{1}{x} \times x = 1$,donc d'après la propriété précédente, on a

$$ln\left(\frac{1}{x}\right) + lnx = ln1$$

Or $ln1 = 0$. Par suite $ln\left(\frac{1}{x}\right) + lnx = 0$, par conséquent $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$.

2. On a

$$\begin{aligned} ln\left(\frac{x}{y}\right) &= ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) \\ &= lnx + ln\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= lnx - lny \end{aligned}$$

donc $ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$.

3. Nous allons montrer cette propriété par récurrence. On considère un réel strictement positif x.

   (a) <u>Initialisation</u> est triviale.

   (b) <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n : $ln\left(x^n\right) = nlnx$. On a

$$\begin{aligned} ln\left(x^{n+1}\right) &= ln\left(x^n \times x\right) \\ &= ln\left(x^n\right) + lnx \\ &= nlnx + lnx \\ &= lnx\,(n+1) \end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie au rang $(n+1)$.

   (c) <u>Conclusion</u> : $(\forall n \in \mathbb{N})\,, ln\left(x^n\right) = nlnx$.

   (d) On considère maintenant un entier relatif n strictement négatif , il existe donc un entier naturel strictement positif m tel que : $m = -n$. Donc

$$\begin{aligned}
ln\left(x^n\right) &= ln\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^m\right) \\
&= m \times ln\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= m \times (-lnx) \\
&= -n \times (-lnx) \\
&= n \times lnx
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour tous entiers relatifs n.

4. On a :

$$\begin{aligned}
2ln\left(\sqrt{x}\right) &= ln\left(\sqrt{x}\right) + ln\left(\sqrt{x}\right) \\
&= ln\left(\sqrt{x} \times \sqrt{x}\right) \\
&= lnx
\end{aligned}$$

donc $ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}lnx$.

Exemple 1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = ln\left(3 - \sqrt{5}\right) + ln\left(3 + \sqrt{5}\right), \;\; B = 3ln\left(2\right) + ln\left(5\right) - 2ln\left(3\right)$$

1. On a

$$\begin{aligned}
A &= ln\left(3 - \sqrt{5}\right) + ln\left(3 + \sqrt{5}\right) \\
&= ln\left(\left(3 - \sqrt{5}\right) \times \left(3 + \sqrt{5}\right)\right) \\
&= ln\left(9 - 5\right) \\
&= ln4 \\
&= ln\left(2^2\right) \\
&= 2ln2
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
B &= 3ln\left(2\right) + ln\left(5\right) - 2ln\left(3\right) \\
&= ln\left(2^3\right) + ln\left(5\right) - ln\left(3^2\right) \\
&= ln\left(8\right) + ln\left(5\right) - ln\left(9\right) \\
&= ln\left(8 \times 5\right) - ln\left(9\right) \\
&= ln\left(40\right) - ln\left(9\right) \\
&= ln\left(\frac{40}{9}\right)
\end{aligned}$$

2.3 Equations et inéquations

Proposition 2. *Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :*

$$a)\quad ln\left(x\right) = ln\left(y\right) \Leftrightarrow x = y \qquad b)\quad ln\left(x\right) < ln\left(y\right) \Leftrightarrow x < y$$

Démonstration. Ces deux propriétés découlent du fait que la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$\square$

Remarque 2. Cette propriété nous permet de résoudre des équations et des inéquations dans lesquelles figurent des logarithmes.

Exemple 2. Résolvons l'équation $ln\left(x\right) = 2$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Soit $x \in \left]0, +\infty\right[$, on a

$$ln\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow ln\left(x\right) = ln\left(e^2\right) \Leftrightarrow x = e^2$$

et comme $e^2 \in \left]0, +\infty\right[$, donc $S = \left\{e^2\right\}$.

Exemple 3. Résolvons l'équation $ln\left(x-3\right) + ln\left(9-x\right) = 0$ dans l'intervalle $\left]3, 9\right[$.

On a $\begin{cases} \left(\forall x \in \left]3, 9\right[\right), x - 3 > 0 \\ \\ \left(\forall x \in \left]3, 9\right[\right), 9 - x > 0 \end{cases}$. Ceci signifie que l'équation est définie sur $\left]3, 9\right[$.

Soit $x \in \left]3, 9\right[$, on a

$$\begin{aligned}
ln\left(x-3\right) + ln\left(9-x\right) = 0 &\Leftrightarrow ln\left(\left(x-3\right) \times \left(9-x\right)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow ln\left(9x - x^2 - 27 + 3x\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow ln\left(-x^2 + 12x - 27\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1 \\
&\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0
\end{aligned}$$

et comme $\triangle = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$, donc l'équation $-x^2 + 12x - 28 = 0$ admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad et \quad x_2 = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car $\begin{cases} \left(6 - 2\sqrt{2}\right) \in \left]3, 9\right[\\ \\ \left(6 + 2\sqrt{2}\right) \in \left]3, 9\right[\end{cases}$. Donc

$$S = \left\{6 - 2\sqrt{2}, 6 + 2\sqrt{2}\right\}$$

Exemple 4. Résolvons l'inéquation $ln\,(6x - 1) \geq 2$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{6}, +\infty\right[$.

On a $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{6}, +\infty\right[\right), 6x - 1 > 0$. Ceci signifie que l'inéquation est définie sur $\left]\frac{1}{6}, +\infty\right[$.

Soit $x \in \left]\frac{1}{6}, +\infty\right[$, on a

$$\begin{aligned} ln\,(6x - 1) \geq 2 &\Leftrightarrow ln\,(6x - 1) \geq ln\left(e^2\right) \\ &\Leftrightarrow 6x - 1 \geq e^2 \\ &\Leftrightarrow 6x \geq e^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{e^2 + 1}{6} \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est donc $\left]\frac{1}{6}, +\infty\right[\cap [\frac{e^2 + 1}{6}, +\infty[$ donc

$$S = [\frac{e^2 + 1}{6}, +\infty[$$

Exemple 5. Résolvons dans un intervalle I à déterminer l'inéquation

$$ln\,(3 - x) - ln\,(x + 1) \leq 0.$$

L'inéquation est définie si $3 - x > 0$ et $x + 1 > 0$ c'est-à-dire si $x < 3$ et $x > -1$ c'est-à-dire si $-1 < x < 3$. Donc l'inéquation est donc définie sur l'intervalle $]-1, 3[$.

Soit $x \in]-1,3[$, on a

$$\begin{aligned} ln(3-x) - ln(x+1) \leq 0 &\Leftrightarrow ln(3-x) \leq ln(x+1) \\ &\Leftrightarrow 3-x \leq x+1 \\ &\Leftrightarrow -2x \leq -3+1 \\ &\Leftrightarrow -2x \leq -2 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S = [1,+\infty[\cap]-1,3[= [1,3[.$$

3 Etude de la fonction logarithme népérien

3.1 Continuité et dérivabilité

Proposition 3. *La fonction logarithme népérien est continue sur* $]0,+\infty[$.

Proposition 4. *La fonction logarithme népérien est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. On a $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$. En posant $u(x) = lnx$ donc

$$\left(e^{ln(x)}\right)' = (lnx)' \times e^{lnx}$$

et comme $\left(e^{ln(x)}\right)' = 1$, donc $(lnx)' \times e^{lnx} = 1$ par suite $(lnx)' = \dfrac{1}{e^{lnx}} = \dfrac{1}{x}$.

□

Exemple 6. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(lnx)^2}{x}$$

On a $f(x) = \dfrac{(lnx)^2}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = (lnx)^2 \rightarrow u'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times lnx \\ \\ v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2lnx}{x} \times x - (lnx)^2 \times 1}{x^2} \\ &= \frac{2lnx - (lnx)^2}{x^2} \\ &= \frac{lnx\,(2 - lnx)}{x^2} \end{aligned}$$

3.2 Variations

Proposition 5. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.

Démonstration. On a $(\forall x \in]0, +\infty[), (lnx)' = \frac{1}{x} > 0$. Donc la fonction ln est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

□

3.3 Limites aux bornes

Proposition 6. :

$$a) \lim_{x \to 0^+} lnx = -\infty \quad b) \lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$$

Démonstration. :

–On considère un réel strictement positif A.

On considère un réel x tel que $x > e^A$. On sait que la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par conséquent $lnx > lne^A$ soit $lnx > A$. Donc

$$\lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty.$$

–On a $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$ alors $lnx = -ln\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $\lim_{x \to 0^+} lnx = -\lim_{x \to 0^+} ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ alors $\lim_{x \to 0^+} ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to +\infty} lnX = +\infty$,

donc $\lim_{x \to 0^+} ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$, par conséquent

$$\lim_{x \to 0^+} lnx = -\infty$$

□

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$(ln(x))'$		$+$	
$ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 4 –

3.4 Courbe représentative

— Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est : $y = x - 1$.

— Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est : $y = \dfrac{1}{e}x$.

— $ln1 = 0$ et $lne = 1$.

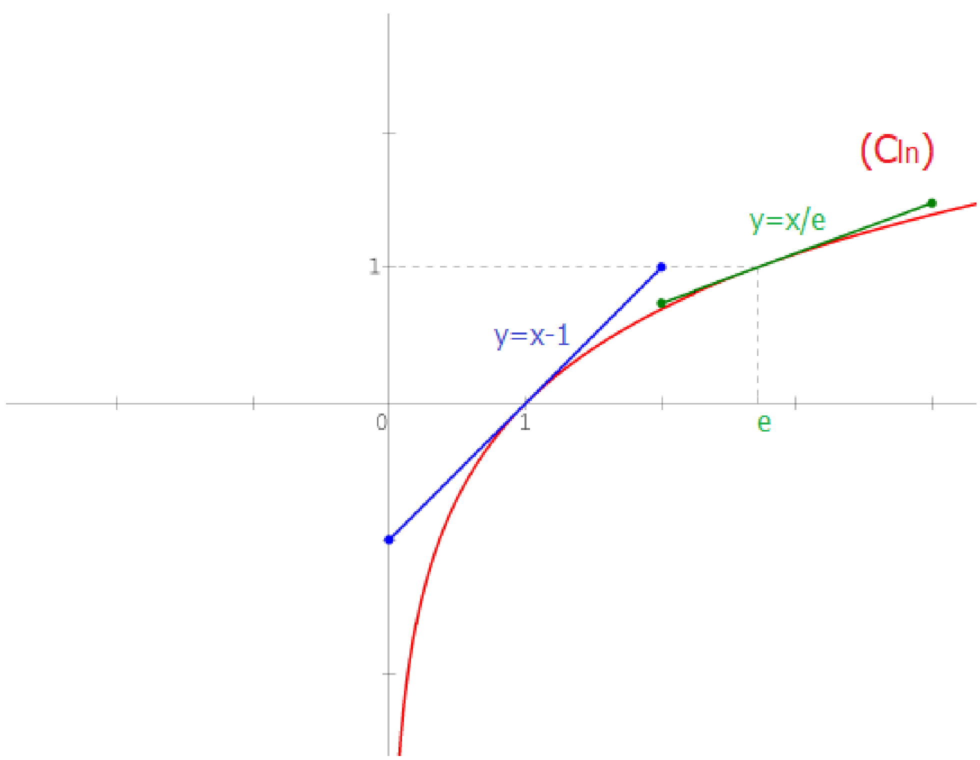

FIGURE 5 –

4 Quelques limites

Proposition 7. *(croissances comparées)*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x} = 0$ *et pour tout entier naturel non nul* n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x^n} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to0^+} xlnx = 0$ *et pour tout entier naturel non nul* n, $\lim\limits_{x\to0^+} x^n lnx = 0$.

Démonstration. :

–On considère un réel strictement positif x et on pose $X = lnx$, on a $x = e^X$ $(x \to +\infty \Rightarrow X \to +\infty)$.

Donc $\dfrac{lnx}{x} = \dfrac{X}{e^X} = \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}}$, par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}}$

et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ alors $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$$

–On considère un réel strictement positif x et on pose $X = lnx$, on a $x = e^X$ $(x \to 0^+ \Rightarrow X \to -\infty)$.

Donc $xlnx = e^X \times X$, par suite $\lim\limits_{x\to0^+} xlnx = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.

□

Exemple 7. Calculer les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} x - lnx \quad b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x-1} \quad c) \quad \lim_{x\to0^+} \quad \frac{1}{(x^2+1)\,lnx}$$

–On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x - lnx = \lim\limits_{x\to+\infty} x \left(1 - \dfrac{lnx}{x}\right)$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{lnx}{x} = 1$ donc par produit on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} x \left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = +\infty$$

par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} x - lnx = +\infty.$

–On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1$ donc $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{lnx}{x}=0\\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1\end{cases}$ par produit on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=0$$

par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{lnx}{x-1}=0.$

–On a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{(x^2+1)\,lnx}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2lnx+lnx}$

et comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}x^2lnx=0\\ \\ \lim\limits_{x\to0^+}lnx=-\infty\end{cases}$ alors par somme : $\lim\limits_{x\to0^+}x^2lnx+lnx=-\infty$

donc par inverse on obtient $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2lnx+lnx}=0$ c'est-à-dire

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(x^2+1)\,lnx}=0.$$

Proposition 8. *On a* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln\,(1+x)}{x}=1.$

Démonstration. On remarque $\dfrac{ln\,(1+x)}{x}=\dfrac{ln\,(1+x)-ln1}{x+1-1}.$

Il s'agit du taux d'accroissement de la fonction ln en 1. Or on sait que la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc en particulier en 1. Donc

$$\lim_{x\to1}\frac{ln\,(1+x)}{x}=ln'\,(1)=1$$

□

5 Dérivée de la fonction $\ln u$

Proposition 9. *On considère une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.*

La fonction $\ln u$ *est alors définie et dérivable sur* I, *et pour tous réels* x *appartenant à* I *on a*

$$(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration. On pose : $v(x) = ln(x)$ donc : $v'(x) = (lnx)' = \frac{1}{x}$. Donc

$$\begin{aligned}(ln(u(x)))' &= (v \circ u)'(x) \\ &= u'(x) \times v'(u(x)) \\ &= u'(x) \times \frac{1}{u(x)} \\ &= \frac{u'(x)}{u(x)}\end{aligned}$$

□

Exemple 8. Dériver de la fonction f définie sur $]0,2[$ par : $f(x) = ln\left(2x - x^2\right)$.

On a $f(x) = ln\left(2x - x^2\right) = ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x - x^2 \to u'(x) = 2 - 2x$ donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$$

Exemple 9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ln\left(5x^2 + 2x + 1\right)$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 5x^2 + 2x + 1$.

On a $\triangle = 4 - 4 \times 5 \times 1 = -16 < 0$ donc $(\forall x \in \mathbb{R}), 5x^2 + 2x + 1 > 0$. Par suite la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

De plus $u'(x) = 10x + 2$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = \frac{10x + 2}{5x^2 + 2x + 1}$$

Exemple 10. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ln\left(\frac{2x}{3x - 1}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{2(3x-1) - 6x}{(3x-1)^2}}{\frac{2x}{3x-1}} \\ &= \frac{-2}{(3x-1)^2} \times \frac{3x-1}{2x} \\ &= \frac{-1}{x(3x-1)}\end{aligned}$$

6 Etude une fonction du type $\ln u$

Exemple 11. On considère la fonction f définie sur $]-2,1[$ par : $f(x) = ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe.
2. Déterminer le sens de variations de la fonction f.
3. Tracer la courbe représentative de f.

1. Calculons $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$:

   (a) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^+} x+2=0 \\ \\ \lim\limits_{x\to-2^+} 1-x=3 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{x+2}{1-x} = 0^+$. On pose $X = \frac{x+2}{1-x}$ $(x \to -2^+ \Rightarrow X \to 0^+)$, donc

   $$\lim_{x\to-2^+} ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right) = \lim_{X\to0^+} lnX = -\infty$$

   par suite $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty.$

   (b) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} x+2=3 \\ \\ \lim\limits_{x\to1^-} 1-x=0^+ \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{x+2}{1-x} = +\infty$. On pose $X = \frac{x+2}{1-x}$ $(x \to 1^- \Rightarrow X \to +\infty)$, donc

   $$\lim_{x\to1^-} ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right) = \lim_{X\to+\infty} lnX = +\infty$$

   par suite $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty.$

   (c) La courbe de fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations : $x=-2$ et $x=1$.

2. La fonction $u : x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur $]-2,1[$,

donc la fonction $f = \ln u$ est dérivable sur $]-2,1[$. Pour tout $x \in]-2,1[$on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{\frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}} \\ &= \frac{\frac{1-x+x+2}{(1-x)^2}}{\frac{x+2}{1-x}} \\ &= \frac{3}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{x+2} \\ &= \frac{3}{(x+2)(1-x)} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]-2,1[)\,, f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)(1-x)}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+2)(1-x)$ sur $]-2,1[$. Donc

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x+2)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

FIGURE 6 –

par suite on déduit le tableau de variations de f :

x	-2		1
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 7 –

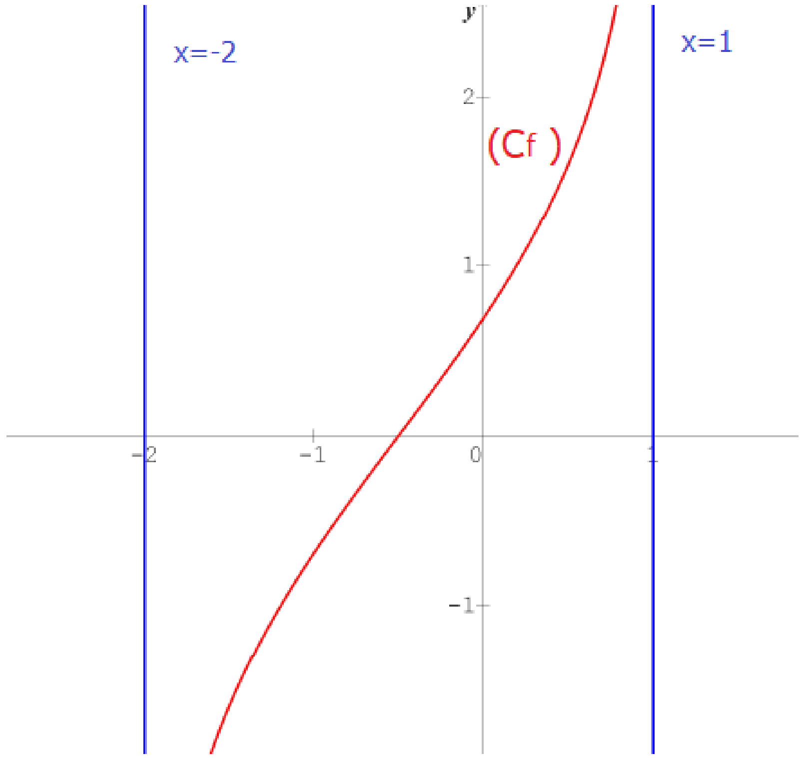

FIGURE 8 –

7 Fonction logarithme décimal

Définition 2. On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée log définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

On obtient ainsi la propriété suivante :

Proposition 10. :

1. *La fonction* log *est définie, dérivable et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.
2. *Pour tous entiers relatifs* n, *on a* $\log 10^n = n$.
3. $\log 10 = 1$ *et* $\log 1 = 0$

4. *Pour tous réels a et b strictement positifs et n entiers relatifs :*

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log(a^n) = n \times \log a$$

Démonstration. Découle de la définition.

$\square$

FIN