

Fonction Exponentielle

TS

Yahya MATIOUI

27 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et théorèmes

Théorème 1. *Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

Démonstration. L'existence de cette fonction est admise.

Montrons que cette fonction ne s'annule pas sur \mathbb{R} et qu'elle est unique.

-La fonction exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{R}

□

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\varphi(x) = f(x) f(-x)$.

Comme f est dérivable sur \mathbb{R} , la fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} par produit :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) \\ &\stackrel{f=f'}{=} f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

et comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

On en déduit alors $f(x) \times f'(-x) = 1$, donc la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

- Unicité de la fonction exponentielle

On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions :

$$\begin{cases} f = f' & f(0) = 1 \\ g = g' & g(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $h = \frac{f}{g}$ définie sur \mathbb{R} car g ne s'annule pas. La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} par quotient de fonctions dérivables :

$$h' = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2} = \frac{f \times g - f \times g}{g^2} = 0$$

La fonction h est donc constante et $h(x) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$. Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

On en déduit que $f = g$. L'unicité de f est donc vérifiée.

Définition 1. On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et on la note : *exp*.

Corollaire 1. $\exp(0) = 1$.

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Dérivabilité

Proposition 1. La fonction exponentielle est continue et dérivable sur \mathbb{R} et

$$(\exp(x))' = \exp(x).$$

Démonstration. Conséquence immédiate de sa définition. □

2.2 Variations

Proposition 2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration. On a démontré dans le paragraphe 1 que la fonction exponentielle ne s'annule jamais. Or, par définition $\exp(0) = 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$. Comme $(\exp(x))' = \exp(x)$, la fonction exponentielle est strictement croissante. □

Proposition 3. Pour tout réels a et b , on a :

1. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
2. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
3. $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Démonstration. Admis □

Exemple 1. .

1. Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

$$e^{2x^2+3} = e^{7x} \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 7x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

et comme $\Delta = 49 - 24 = 25 > 0$ l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{7+5}{4} = 3$ et $x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ donc

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

2. Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{3x} \leq e^{x+6}$

$$e^{3x} \leq e^{x+6} \Leftrightarrow 3x \leq x + 6 \Leftrightarrow 3x - x \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

donc $S =] - \infty, 3]$.

2.3 Limites en l'infini

Proposition 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Propriété démontrée au paragraphe III

2.4 Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\exp x)'$	+		
$\exp x$			

FIGURE 1 –

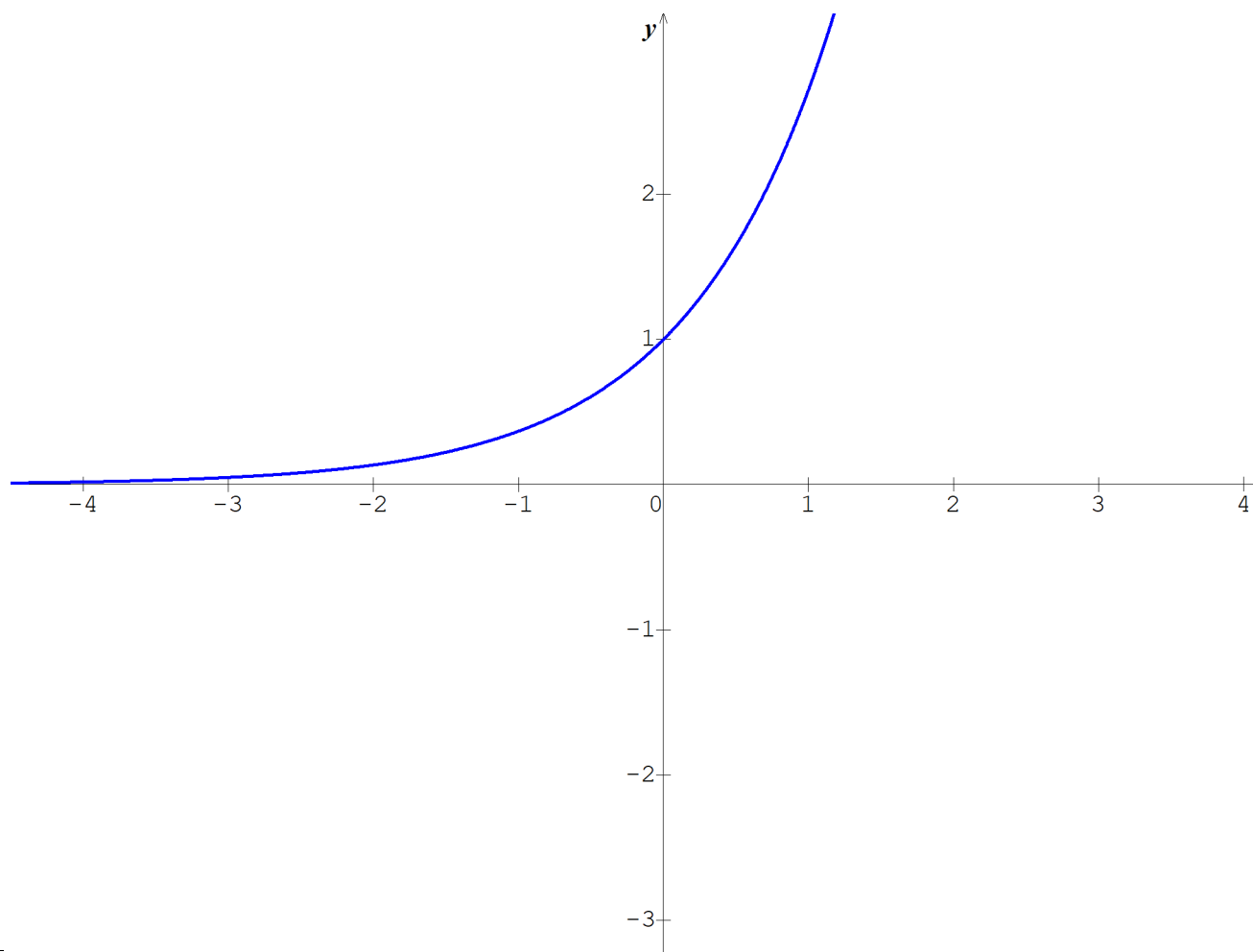


FIGURE 2 –

3 Propriété de la fonction exponentielle

3.1 Relation fonctionnelle

Théorème 2. *Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.*

Remarque 1. La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Démonstration. Comme $\exp(x) \neq 0$, on pose $f(x) = \frac{\exp(x + y)}{\exp(x)}$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{\exp(x + y) \times \exp(x) - \exp(x + y) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0.$$

Donc la fonction f est constante. Comme $f(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$, on en déduit

que $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ c'est-à-dire $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

□

Corollaire 2. Pour tous réels x et y , on a :

1. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
2. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
3. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. .

$$-\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1, \text{ donc } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

-On a

$$\begin{aligned} \exp(x-y) &= \exp(x+(-y)) \\ &= \exp(x) \times \exp(-y) \\ &= \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} \\ &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \end{aligned}$$

-Raisonnement de proche en proche à l'aide de la relation fonctionnelle.

□

3.2 Le nombre e

Définition 2. L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e . On a ainsi $\exp(1) = e$.

Remarque 2. Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e . 2,718281828

Notation Nouvelle : $\exp(x) = \exp(x \times 1) = (\exp(1))^x = e^x$

On note $(\forall x \in \mathbb{R}), \exp(x) = e^x$.

Proposition 5. Pour tous réels x et y on a :

1. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
2. $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$
3. $e^{x+y} = e^x \times e^y$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $(e^{nx}) = (e^x)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Démonstration. Démontrons la propriété 4^{ème}.

Démontrons d'abord le résultat suivant : $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x$.

Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = e^x - x$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . On a $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = e^x - 1$.

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

et : $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

De même on a $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

FIGURE 3 -

Alors pour tout réel x on a $f(x) \geq 1$ par suite $f(x) > 0$ c'est-à-dire

$$(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x.$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Démontrons que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

$$\text{On a } e^x = e^{-(-x)} = \frac{1}{e^{-x}}$$

On pose $X = -x$ ($x \rightarrow -\infty \Rightarrow X \rightarrow +\infty$) donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X}$$

et comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ alors $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. □

Exemple 2. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}, B = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}.$$

$$- A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \frac{e^3}{e^{-5}} = e^{3+5} = e^8.$$

- On a

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^2 \times e^{-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{2-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + e^{-4+4} \\ &= e^6 + e^0 \\ &= e^6 + 1 \end{aligned}$$

4 Limites et croissances comparées

Proposition 6. .

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier naturel n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et pour tout entier naturel n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration. .

-On a $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x$. En particulier, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(e^x)^2 > x^2$ donc

$$(\forall x \in]0, +\infty[), \frac{e^{2x}}{x} > x.$$

Posons $X = 2x$ donc $(\forall X \in]0, +\infty[), \frac{e^X}{X} > \frac{X}{4}$.

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{4} = +\infty$ alors $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Dans le cas général, montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$$\text{On a } \frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} \right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n .$$

On pose $X = \frac{x}{n}$ alors ($x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow +\infty$) donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

– Posons $X = -x$ alors

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-X)^n \times e^{-X} \\ &= (-1)^n \times \frac{X^n}{e^X} \\ &= (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \end{aligned}$$

et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} = 0$. $\left(\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty \right)$.

□

Proposition 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration. Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

□

Exemple 3. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-4x}), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}.$$

– On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{e^{4x}}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{4x}} = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{e^{4x}} = +\infty$.

D'ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-4x}) = +\infty$$

– On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^1$.

— On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$ et comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = 1$ c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = 1.$$

5 Fonctions de la forme e^u

Proposition 8. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I . Sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$.

Démonstration. Admis. □

Exemple 4. Soient f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x-1}$ et $g(x) = e^{-x^2}$. Les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} : $f'(x) = 2e^{2x-1}$ et $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.

Proposition 9. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration. On a $(e^u)' = u' \times e^u$, et comme $e^u > 0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe. □

Exemple 5. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$.

Étudier une fonction

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f .

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

— On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2} = +\infty$ alors $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{-x}{2}} = -\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times e^{\frac{-x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{x}{2} \times e^{\frac{-x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} \end{aligned}$$

et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ alors $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

— La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x e^{\frac{-x}{2}} \right)' \\ &= e^{\frac{-x}{2}} + x \times \left(\frac{-1}{2} \right) \times e^{\frac{-x}{2}} \\ &= e^{\frac{-x}{2}} \left(1 - \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

et comme $(\forall x \in \mathbb{R}), e^{\frac{-x}{2}} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(1 - \frac{x}{2} \right)$ sur \mathbb{R} .

$$1 - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

et comme $a = \frac{-1}{2} < 0$ donc on déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

FIGURE 4 –

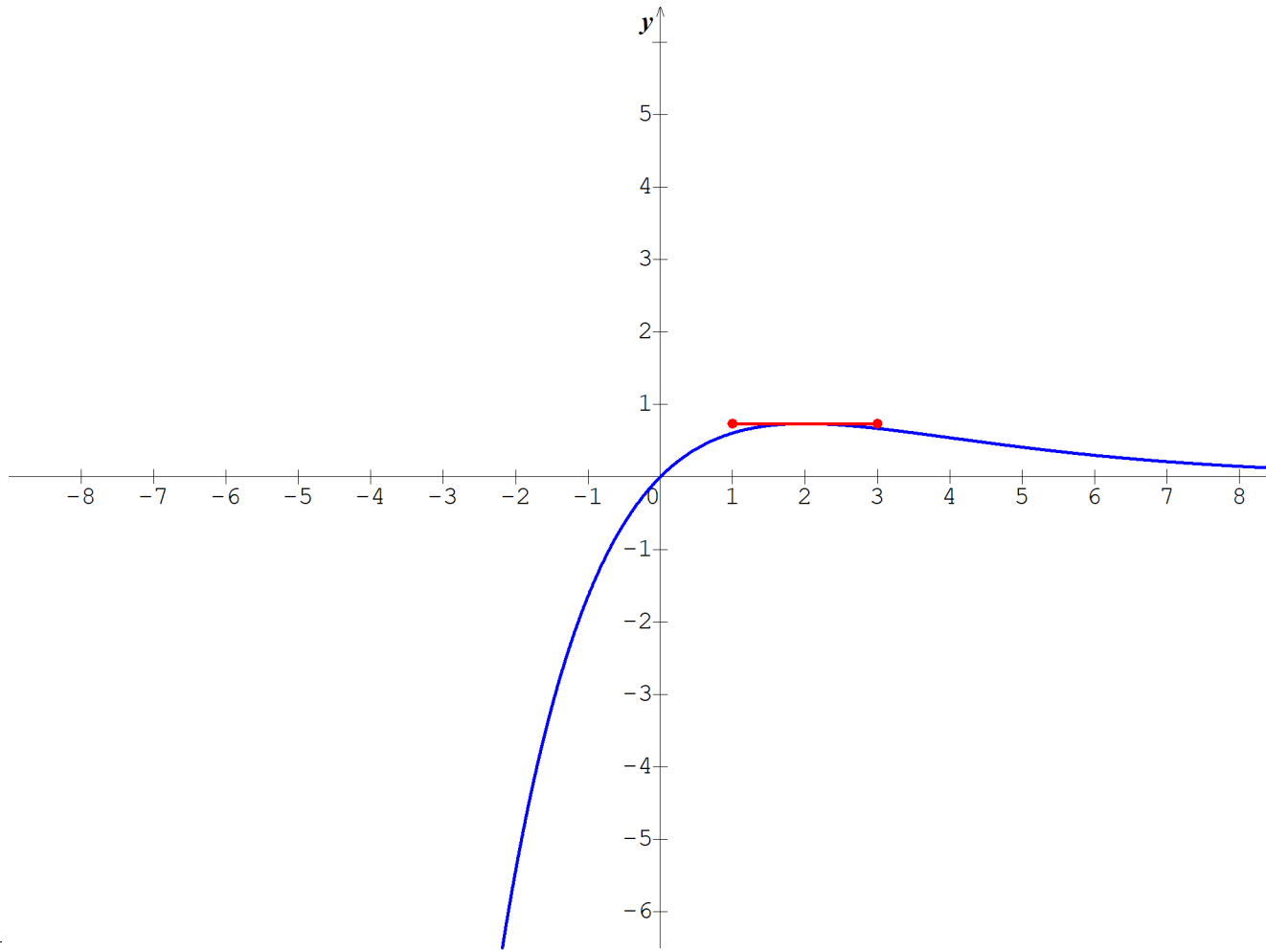


FIGURE 5 –

—

FIN