Fonction Exponentielle

2 BAC PC-SVT

Yahya MATIOUI

12 août 2023

www.etude-generale.com

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition

Définition 1. La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la fonction exponentielle népérienne (ou la fonction exponentielle), et on la note exp .

Remarque 1. :

1. Par définition de la fonction exp : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0,+\infty[)\ ,(y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$
2. $\exp(0) = 1$ car $\ln(1) = 0$.

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Dérivabilité

Proposition 1. *La fonction exponentielle est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$(exp(x))' = exp(x).$$

2.2 Variations

Proposition 2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) > 0$.

Proposition 3. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 4. *Pour tout réels* a *et* b, *on a :*

1. $exp(a) = exp(b) \Leftrightarrow a = b$
2. $exp(a) < exp(b) \Leftrightarrow a < b$
3. $exp(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0$

4. $(a < 0 \Leftrightarrow exp\,(a) < 1)$ et $(a > 0 \Leftrightarrow exp\,(a) > 1)$

Exemple 1. :

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $exp\left(2x^2+3\right) = exp\,(7x)$

$$exp\left(2x^2+3\right) = exp\,(7x) \Leftrightarrow 2x^2+3 = 7x \Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0$$

   et comme $\triangle = 49 - 24 = 25 > 0$ l'équation $2x^2-7x+3=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{7+5}{4} = 3$ et $x_2 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ donc

$$S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $exp\,(3x) \leq exp\,(x+6)$

$$exp\,(3x) \leq exp\,(x+6) \Leftrightarrow 3x \leq x+6 \Leftrightarrow 3x - x \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

   donc $S =]-\infty, 3]$.

Exemple 2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $exp\left(\dfrac{x+5}{2x+3}\right) = exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

Cette équation est définie pour les réels x tels que : $2x+3 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{1, \dfrac{-3}{2}\right\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \dfrac{-3}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned} exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) &= exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $x^2+2x-8=0$ sont -4 et 2, qui sont dans $\mathbb{R}\backslash\left\{1, \dfrac{-3}{2}\right\}$. Par suite, l'ensemble solution de l'équation est :

$$S = \{2, -4\}$$

Exemple 3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $exp\,(2x+1) \leq exp\left(\dfrac{6}{x}\right)$

Cette inéquation est défini pour tout réel non nul. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} exp\,(2x+1) \leq exp\left(\frac{6}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x+1 \leq \frac{6}{x} \\ &\Leftrightarrow 2x+1-\frac{6}{x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2+x-6}{x} \leq 0 \end{aligned}$$

En étudiant le signe de $\dfrac{2x^2+x-6}{x}$ on obtient comme ensemble solutions :

$$S =]-\infty,-2] \bigcup]0,\frac{3}{2}]$$

2.3 Limites en l'infini

Proposition 5. $\lim\limits_{x \to -\infty} exp\,(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} exp\,(x) = +\infty$.

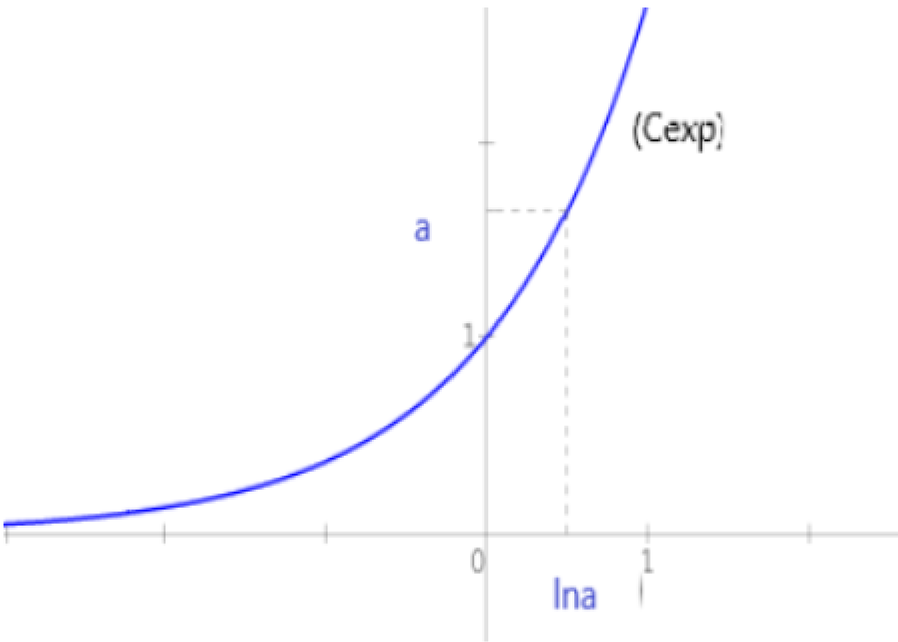
Propriété démontrée au paragraphe III

2.4 Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\mathrm{e}^{(x)})'$		$+$	
$\mathrm{e}^{(x)}$	0	1	$+\infty$

FIGURE 1 –



3 Propriété de la fonction exponentielle

3.1 Relation fonctionnelle

Théorème 1. *Pour tous réels x et y, on a :* $exp\left(x+y\right)=exp\left(x\right)\times exp\left(y\right)$.

Remarque 2. La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Démonstration. Comme $exp\left(x\right)\neq 0$, on pose $f\left(x\right)=\dfrac{exp\left(x+y\right)}{exp\left(x\right)}$ avec $y\in\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f'\left(x\right)=\frac{exp\left(x+y\right)\times exp\left(x\right)-exp\left(x+y\right)\times exp\left(x\right)}{\left(exp\left(x\right)\right)^{2}}=0.$$

Donc la fonction f est constante. Comme $f\left(0\right)=\dfrac{exp\left(y\right)}{exp\left(0\right)}=exp\left(y\right)$, on en déduit que $\dfrac{exp\left(x+y\right)}{exp\left(x\right)}=exp\left(y\right)$ c'est-à-dire $exp\left(x+y\right)=exp\left(x\right)\times exp\left(y\right)$.

□

Corollaire 1. *Pour tous réels x et y, on a :*

1. $exp\left(-x\right)=\dfrac{1}{exp\left(x\right)}$
2. $exp\left(x-y\right)=\dfrac{exp\left(x\right)}{exp\left(y\right)}$

3. $exp\left(nx\right) = \left(exp\left(x\right)\right)^{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. .

–$exp\left(x\right) \times exp\left(-x\right) = exp\left(x-x\right) = exp\left(0\right) = 1$, donc $exp\left(-x\right) = \dfrac{1}{exp\left(x\right)}$.

–On a

$$\begin{aligned} exp\left(x-y\right) &= exp\left(x+\left(-y\right)\right) \\ &= exp\left(x\right) \times exp\left(-y\right) \\ &= exp\left(x\right) \times \frac{1}{exp\left(y\right)} \\ &= \frac{exp\left(x\right)}{exp\left(y\right)} \end{aligned}$$

–Raisonnement de proche en proche à l'aide de la relation fonctionnelle.

□

3.2 Le nombre e

Définition 2. L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $exp\left(1\right) = e$.

Remarque 3. Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e. $2,718281828$

Notation Nouvelle : $exp\left(x\right) = exp\left(x \times 1\right) = \left(exp\left(1\right)\right)^{x} = e^{x}$

On note $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), exp\left(x\right) = e^{x}$.

Proposition 6. *Pour tous réels x et y on a :*

1. $e^{0} = 1$ et $e^{1} = e$
2. $e^{x} > 0$ et $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$
3. $e^{x+y} = e^{x} \times e^{y}$, $e^{x-y} = \dfrac{e^{x}}{e^{y}}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$ et $\left(e^{nx}\right) = \left(e^{x}\right)^{n}$ $\left(n \in \mathbb{N}\right)$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

Démonstration. Démontrons la propriété $4^{éme}$.

Démontrons d'abord le résultat suivant : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), e^{x} > x$.

Pour tout réel x, on pose

$$f\left(x\right) = e^{x} - x$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), f'\left(x\right) = e^{x} - 1$.

On a $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow e^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 1 \Leftrightarrow e^{x} = e^{0} \Leftrightarrow x = 0$

et : $x > 0 \Leftrightarrow e^{x} > e^{0} \Leftrightarrow e^{x} > 1 \Leftrightarrow e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) > 0$

De même on a $x < 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) < 0$.

Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

FIGURE 2 –

Alors pour tout réel x on a $f(x) \geq 1$ par suite $f(x) > 0$ c'est-à-dire

$$(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x.$$

Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

<u>Démontrons que :</u> $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

On a $e^x = e^{-(-x)} = \dfrac{1}{e^{-x}}$

On pose $X = -x$ $(x \to -\infty \Rightarrow X \to +\infty)$ donc

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$$

et comme $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ alors $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

$\square$

Exemple 4. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}, B = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}.$$

— $A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^3}{e^{-5}} = e^{3+5} = e^8$.

— On a

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} + \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\
&= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^2 \times e^{-6}} \\
&= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{2-6}} \\
&= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \\
&= \frac{1}{e^{-6}} + e^{-4+4} \\
&= e^6 + e^0 \\
&= e^6 + 1
\end{aligned}$$

4 Limites et croissances comparées

Proposition 7. .

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ *et pour tout entier naturel* n*,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ *et pour tout entier naturel* n*,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration. .

–On a $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x$. En particulier, pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[, \left(e^x\right)^2 > x^2$ donc

$$\left(\forall x \in \left]0, +\infty\right[\right), \frac{e^{2x}}{x} > x.$$

Posons $X = 2x$ donc $\left(\forall X \in \left]0, +\infty\right[\right), \frac{e^X}{X} > \frac{X}{4}$.

Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{4} = +\infty$ alors $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Dans le cas général, montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

On a $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.

On pose $X = \frac{x}{n}$ alors $(x \to +\infty \Rightarrow X \to +\infty)$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

– Posons $X = -x$ alors

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-X)^n \times e^{-X} \\ &= (-1)^n \times \frac{X^n}{e^X} \\ &= (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} = 0$. $\left(\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty\right)$.

□

Proposition 8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration. Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

□

Exemple 5. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + e^{-4x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$.

— On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x + e^{-4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{e^{4x}}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{4x}} = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{e^x} = +\infty$. D'ou

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x + e^{-4x}\right) = +\infty$$

— On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^1$.

— On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$ et comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

alors $\underset{x\to+\infty}{lim}\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{x^2}{e^x}}=1$ c'est-à-dire

$$\underset{x\to+\infty}{lim}\frac{e^x+x}{e^x-x^2}=1.$$

5 Fonctions de la forme e^u

Proposition 9. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.*
La fonction $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x\mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$.

Démonstration. Admis.

$\square$

Exemple 6. Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x-1}$ et $g(x)=e^{-x^2}$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=2e^{2x-1}$ et $g'(x)=-2xe^{-x^2}$.

Exemple 7. Déterminons les dérivées des fonctions f,g et h définies par :

$$f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}\quad,\quad g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}\quad,\quad h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

— La fonction $x\mapsto\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $\left]\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$ et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\left]\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$ et on a :

$$\left(\forall x\in\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[\right),f'(x)=\frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}$$

— Les fonctions polynomiales $x\mapsto-2x^2$ et $x\mapsto 3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et leurs dérivées sont $x\mapsto-4x$ et $x\mapsto 3$ respectivement. Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x\in\mathbb{R}),g'(x)=-4xe^{-2x^2}-9e^{3x+1}$$

— La fonction rationnelle $x\mapsto\dfrac{x+1}{-x+3}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]3,+\infty[$ et $]-\infty,3[$, et sa dérivée est : $x\mapsto\dfrac{4}{(x-3)^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Donc la fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $]3,+\infty[$ et $]-\infty,3[$ et on a :

$$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}),h'(x)=\frac{4}{(x-3)^2}e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

Proposition 10. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.*

Démonstration. On a $(e^u)' = u' \times e^u$, et comme $e^u > 0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe. $\square$

Exemple 8. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Étudier une fonction

Exemple 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$.

1. Calculer $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x)$ et $\underset{x\to-\infty}{lim} f(x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

— On a $\underset{x\to-\infty}{lim} \dfrac{-x}{2} = +\infty$ alors $\underset{X\to+\infty}{lim} e^X = +\infty$ et comme $\underset{x\to-\infty}{lim} x = -\infty$ donc $\underset{x\to-\infty}{lim} xe^{\frac{-x}{2}} = -\infty$ c'est-à-dire

$$\underset{x\to-\infty}{lim} f(x) = -\infty$$

On a

$$\begin{aligned}
\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) &= \underset{x\to+\infty}{lim} x \times e^{\frac{-x}{2}} \\
&= \underset{x\to+\infty}{lim} 2 \times \frac{x}{2} \times e^{\frac{-x}{2}} \\
&= \underset{x\to+\infty}{lim} 2 \times \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}
\end{aligned}$$

et comme $\underset{x\to+\infty}{lim} \dfrac{x}{2} = +\infty$ alors $\underset{X\to+\infty}{lim} \dfrac{X}{e^X} = 0$ donc $\underset{x\to+\infty}{lim} 2 \times \dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ c'est-à-dire

$$\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = 0.$$

— La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(xe^{\frac{-x}{2}}\right)' \\
&= e^{\frac{-x}{2}} + x \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times e^{\frac{-x}{2}} \\
&= e^{\frac{-x}{2}} \left(1 - \frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

et comme $(\forall x \in \mathbb{R}), e^{\frac{-x}{2}} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

$$1 - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

et comme $a = \dfrac{-1}{2} < 0$ donc on déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

FIGURE 3 –

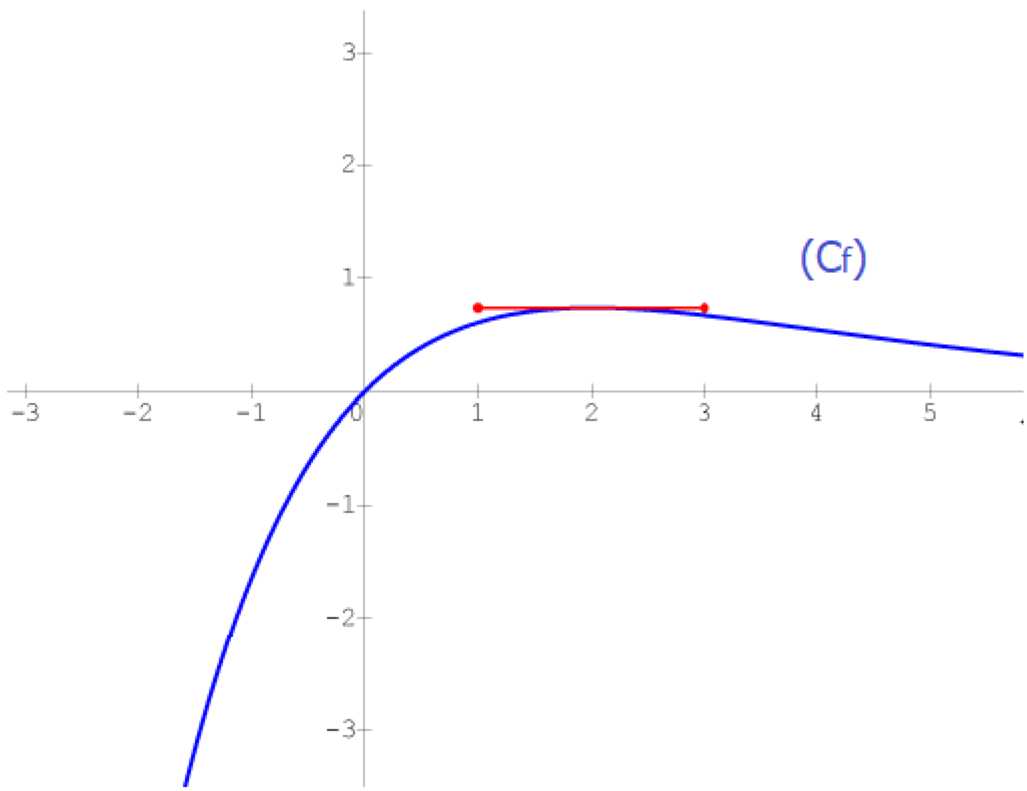


FIGURE 4 –

6 Fonction Exponentielle de Base a

6.1 Définition de la fonction exponentielle de base a

Définition 3. Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction log_a. On la note exp_a.

Remarque 4. :

- D'après la définition 2, on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in]0,+\infty[)\,,(y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = log_a(y))$
- Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. On a alors :

$$y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = log_a(x) = \frac{ln(y)}{ln(a)} \Leftrightarrow ln(y) = xln(a) \Leftrightarrow y = e^{xln(a)}$$

  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $exp_a(x) = e^{xlna}$

6.2 Propriété Algébriques

Proposition 11. *Soit x et y deux réels et r un nombre rationnel $(r \in \mathbb{Q})$. Alors :*

$$exp_a(x+y) = exp_a(x) \times exp_a(y)\,,\quad exp_a(x-y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)},\quad exp_a(rx) = (exp_a(x))^r$$

6.3 Une autre écriture de la fonction $\mathbf{exp}_a$

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On a $exp_a(1) = e^{ln(1)} = a$. Et puisque pour tout $r \in \mathbb{Q}$:

$$exp_a(r) = (exp_a(1))^r = a^r.$$

On pronlonge cette écriture sur l'ensemble des nombres réels en écrivant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$exp_a(x) = a^x.$$

Proposition 12. *Soit a un réel strictement positif et différent de* 1. *Alors* :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in]0,+\infty[)\,, y = a^x \Leftrightarrow x = \dfrac{lny}{lna}$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})\,, log_a(x) = x$ et $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, a^{log_a(x)} = x$.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $a^{x+y} = a^x \times a^y$ et $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

Proposition 13. *Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $a^{x+y} = a^x \times a^y$
2. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
4. $(a^x)^y = a^{x \times y}$
5. $(ab)^x = a^x \times b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

FIN