Dérivation

T-S

Yahya MATIOUI

26 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Formules de dérivation

Fonction	Dérivée
a, $a \in \mathbb{R}$	0
ax, $a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
x^n, $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{kx} , $k \in \mathbb{R}$	ke^x

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku , $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 1. :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2$. Alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = 6x$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x}$. Alors

$$\begin{aligned}
(\forall x\in]0,+\infty[),\, f'(x) &= \left(x\sqrt{x}\right)' \\
&= 1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{2x}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

3. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$. Alors

$$\begin{aligned}
(\forall x\in]0,+\infty[),\, f'(x) &= \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)' \\
&= \frac{1\times\sqrt{x}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} \\
&= \frac{\sqrt{x}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} \\
&= \frac{\dfrac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{x} \\
&= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Proposition 1. *(équation de la tangente en un point)*

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a est : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$

Exemple 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + x$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = 6x + 1$, et $\begin{cases} f(-1) = 2 \\ \\ f'(-1) = -5 \end{cases}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse -1 est donc $y = -5(x - (-1)) + 2$ par suite

$$(T) : y = -5x - 3.$$

Proposition 2. *Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.*

— *Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.*
— *Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.*

Exemple 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 5$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

— On a $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$.
— On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

Le discriminant du trinome $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\triangle = 225$ donc l'équation possède deux solutions : $x_1 = \dfrac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$. Comme $a = 3 > 0$ donc

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x2{+}9x{-}12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 1 –

— On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	61	$\searrow$	$\frac{-3}{2}$	$\nearrow$	

FIGURE 2 –

avec $f(-4) = 61$ et $f(-1) = \dfrac{-3}{2}$

Proposition 3. *On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et un réel a de l'intervalle I.*

1. *Si f' s'annule en a changeant de signe alors la fonction f possède un extremum local en a.*
2. *Si f possède un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.*

2 Nouvelles formules

2.1 Dérivée de $\sqrt{u}$

Proposition 4. *On considère une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.*

La fonction f définie pour tous réel x de l'intervalle I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ pour tous réels x de l'intervalle I.

Démonstration. On considère deux réels a et h tels que a et $a+h$ appartiennent tous les deux à I.

On calcule le taux de variations pour $h \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}\right)\left(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}\right)}{h\left(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}\right)} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h\left(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}\right)} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}}
\end{aligned}$$

comme la fonction u est dérivable sur l'intervalle I donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a).$$

On sait également que la fonction u est continue, car dérivable sur l'intervalle I donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u(a)}}$. Par suite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}} = f'(a)$$

Ce résultat est valable pour tous les réels a de l'intervalle I. Donc

$$(\forall x \in I), f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

□

Exemple 4. Déterminer la dérivée de la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$

On pose : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x - 1 \to u'(x) = 6x + 4$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}} \\ &= \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}} \end{aligned}$$

2.2 Dérivée de u^n , $n \in \mathbb{Z}^*$

Proposition 5. *On considère un entier relatif n et une fonction u dérivable sur un intervalle I (et ne s'annulant pas sur cet intervalle si $n < 0$). La fonction f définie pour tous réels x de l'intervalle I par $f(x) = (u(x))^n$ est dérivable sur l'intervalle I et*

$$(\forall x \in I), f'(x) = n \times u'(x)(u(x))^{n-1}$$

Démonstration. On suppose que la fonction u n'est pas la fonction nulle.

Nous allons montrer par récurrence que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$ la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons maintenant que la propriété vraie au rang n : $((u(x))^n)' = n \times u'(x)(u(x))^{n-1}$, et montrons que la propriété est vraie pour $n + 1$.

On a

$$\begin{aligned} \left((u(x))^{n+1}\right)' &= ((u(x))^n \times u(x))' \\ &= ((u(x))^n)' \times u(x) + (u(x))^n \times u'(x) \\ &= n \times u'(x)(u(x))^{n-1} \times u(x) + (u(x))^n \times u'(x) \\ &= n \times u'(x)(u(x))^n + (u(x))^n \times u'(x) \\ &= u'(x)(u(x))^n(n+1) \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul on a $\left((u(x))^n\right)' = n \times u'(x)(u(x))^{n-1}$.

Nous allons montrer maintenant que la propriété est également vraie si n est un entier relatif strictement négatif. Puisque $n < 0$, il existe un entier naturel m non nul tel que $n = -m$.

On a

$$\begin{aligned}
\left(u(x)^n\right)' &= \left(\frac{1}{(u(x)^m)}\right)' \\
&= -\frac{\left(u(x)^m\right)'}{\left(u(x)^m\right)^2} \\
&= -\frac{m \times u'(x)(u(x))^{m-1}}{(u(x))^{2m}} \\
&= -m \times u'(x)(u(x))^{-m-1} \\
&= n \times u'(x)(u(x))^{n-1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 5. Déterminer la dérivée de la fonction définie par : $g(x) = \left(2x^2 + 4x + 5\right)^4$

On pose $g(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 4x + 5 \to u'(x) = 4x + 4$. Donc

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 4 \times u'(x)(u(x))^3 \\
&= 4(4x+4)\left(2x^2 + 4x + 5\right)^3
\end{aligned}$$

2.3 Dérivée de $x \mapsto u(ax+b)$

Proposition 6. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux nombres réels $(a \neq 0)$. Et soit J l'ensemble des réels x tels que : $(ax+b) \in I$.*

La fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur l'intervalle J, et on a

$$(\forall x \in J), f'(x) = a \times u'(ax+b)$$

Démonstration. Admis

□

Exemple 6. On considère la fonction f définie sur $[-6, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$.

On appelle u la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x}$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a également $a = \frac{1}{2}$ et $b = 3$. $(\forall x \in]-6, +\infty[)\,, \left(\frac{1}{2}x + 3\right) > 0$. Donc la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-6, +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x + 3}}$$

D'ou $(\forall x \in]-6, +\infty[)\,, f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x + 3}}$.

La propriété suivante, bien que hors programme, résume les trois propriétés précédentes.

Proposition 7. *(Hors programme)*

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et g une fonction définie et dérivable sur J telle que $(\forall x \in J)\,, g(x) \in I$.

La fonction $f \circ g$ est dérivable sur l'inetrvalle J, et :

$$(\forall x \in J)\,, (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

2.4 Tableaux récapitulatifs

f	f'	commentaire
u^n	$nu' \times u^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}^*$ et $u(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	si $u(x) > 0$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto a \times u'(ax+b)$	

3 Etude d'une fonction composée

Exemple 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

— On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{2} = +\infty$ alors $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{-x}{2}} = -\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x \times e^{\frac{-x}{2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2 \times \frac{x}{2} \times e^{\frac{-x}{2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2 \times \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ alors $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\times\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

— La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(xe^{\frac{-x}{2}}\right)' \\ &= e^{\frac{-x}{2}} + x \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times e^{\frac{-x}{2}} \\ &= e^{\frac{-x}{2}} \left(1 - \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

et comme $(\forall x \in \mathbb{R}), e^{\frac{-x}{2}} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

$$1 - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

et comme $a = \dfrac{-1}{2} < 0$ donc on déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

Figure 3 –

— La courbe représentative de la fonction f :

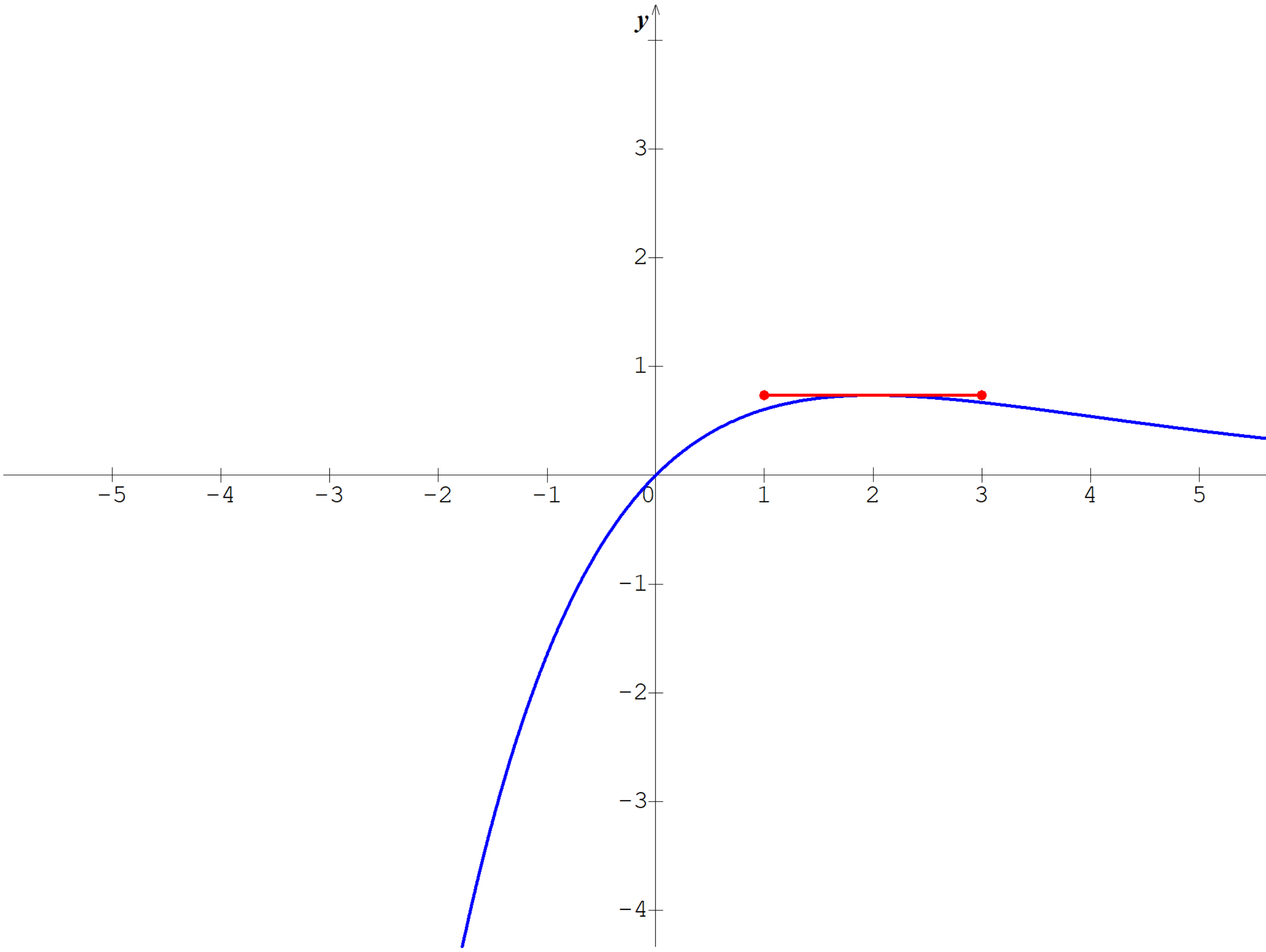

FIGURE 4 –

FIN