Dénombrement

1 BAC SM

Yahya MATIOUI

7 août 2023

www.etude-generale.com

1 Ensemble fini

Définition 1. :

1. Un ensemble E est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
2. Le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de l'ensemble et il est noté : $card\left(E\right)$ ou $\left|E\right|$.
3. Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est-à-dire en déterminer le cardinal.

Exemple 1. :

1. L'ensemble E des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $card\left(E\right)=11$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

Définition 2. On dit que deux ensembles sont disjoints, s'ils ont aucun éléments en commun.

Proposition 1. *Soient E et F deux ensembles finis.*

1. $card\left(E\bigcup F\right)=card\left(E\right)+card\left(F\right)-card\left(E\bigcap F\right).$
2. *Si E et F sont disjoints alors :* $card\left(E\bigcup F\right)=card\left(E\right)+card\left(F\right).$
   (a) *Si $\left(X_i\right)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'ensemble disjoints deux à deux alors*
   $$card\left(\bigcup_{i=1}^{n}Xi\right)=\sum_{i=1}^{n}card\left(X_i\right)$$
3. *Si $E\subset F$ alors :* $card\left(E\right)\leq card\left(F\right)$ *et* $card\left(F\setminus E\right)=card\left(F\right)-card\left(E\right).$

2 Principe Fondamental du dénombrement (Principe du Produit)

2.1 Introduction

On lance dans l'air une pièce de monnaie 3 fois successives. Quel est le nombre total de cas possibles ?

- Le premier lancer dispose de 2 possibilités.
- Le deuxième lancer dispose de 2 possibilités.
- Le troisième lancer dispose de 2 possibilités.
  - Donc le nombre total de cas possibles est : $N = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Proposition 2. *(Principe du produit)*

On considère une expérience aléatoire formée de deux choix, si le 1er choix offre n_1 possibilités et le 2ème choix offre n_2 possibilités, alors le nombre de choix total est :

$$N = n_1 \times n_2.$$

Remarque 1. Le principe du produit se généralise à une expérience aléatoire formée de p choix avec $p \geq 2$. Dans ce cas le nombre de choix total est : $N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.

Exemple 2. De combien de manières peut-on garer 4 voitures dans 6 places vides dans un parking ?

- Pour la 1ère voiture on dispose de 6 possibilités
- pour la 2ème il en reste 5, pour la 3ème il en reste 4 et pour la 4ème il en reste 3.
  - D'après le principe du produit le total des possibilités pour garer les 4 voitures est : $N = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Exemple 3. Soit $E = \{0, 1, 2, 4\}$. Déterminer le nombre total de nombres ayant 4 chiffres parmi les éléments de E.

On a

milles	cent	dix	unité
3	4	4	4

.

- D'après le principe du produit le total des possibilités est

$$N = 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192.$$

3 Arrangements et Combinaisons

3.1 Arrangements sans répétition

3.1.1 Introduction

On veut former un nombre n de 2 chiffres $n = ab$ choisis parmi $1, 2$ et 3. On exige de plus que tous les chiffres soient distincts deux à deux.

Toute possibilité est un couple (a, b) avec a et b sont distincts deux à deux et choisis parmi les éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

$$1 \xrightarrow[3]{2} \begin{cases} 12 \\ \\ 13 \end{cases} , 2 \xrightarrow[3]{1} \begin{cases} 21 \\ \\ 23 \end{cases} \quad et\ 3 \xrightarrow[2]{1} \begin{cases} 31 \\ \\ 32 \end{cases}$$

Toute possibilité est appelée arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 3. Donc le nombre total de possibilités est 6.

Proposition 3. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$. Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n est :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 4. Calculer : A_5^2, A_4^3 et A_6^4.

On a

— $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20.$

— $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4!}{1!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24.$

— $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360.$

Remarque 2. On a $A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)}_{p \ \ facteurs}$.

Remarque 3. Si $p = n$ alors tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n est appelé permutation à n éléments. Le nombre de permutations à n éléments est :

$$A_n^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1}_{n \ \ facteurs}$$

Ce nombre est noté $n!$ qu'on lit factoriel n, donc $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Exemple 5. De combien de manières on peut ranger 5 livres dans 5 tiroirs de sorte que chaque tiroir ne peut contenir plus d'un livre ?

Toute possibilité est une permutation à 5 éléments, donc le nombre total de possibilités pour ranger les 5 livres dans les 5 tiroirs est $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

3.2 Arrangements avec répétition

3.2.1 Introduction

On veut former un nombre n de 2 chiffres $n = ab$ choisis parmi $1, 2$ et 3. (éventuellement un élément peut apparaître plusieurs fois)

Toute possibilité est appelée arrangement avec répétition de 2 éléments parmi 3. Donc le nombre total de possibilités est 9.

Proposition 4. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*

Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n est : n^p.

3.3 Combinaisons

3.3.1 Introduction

On considère l'ensemble : $E = \{a, b, c, d\}$.

- La liste de toutes les parties de E formés de 2 éléments est : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, ces parties sont appelés combinaison à 2 éléments parmi 4. Leurs nombre est noté $C_4^2 = 6$.
- La liste de toutes les combinaisons à 3 éléments parmi 4 est : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ et $\{b, c, d\}$. Leurs nombre est : $C_4^3 = 4$.

Proposition 5. *Soient n et p deux entiers naturels.*

Le nombre de combinaison à p éléments choisis parmi n est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Exemple 6. Calculer : C_4^2 , C_5^3 , C_6^4 et C_2^1.

On a

- $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{4!}{2! \times (4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6.$
- $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{3!} = \dfrac{5!}{3! \times (5-3)!} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10.$
- $C_6^4 = \dfrac{A_6^4}{4!} = \dfrac{6!}{4! \times (6-4)!} = \dfrac{6!}{4! \times 2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 15.$
- $C_2^1 = \dfrac{A_2^1}{1!} = \dfrac{2!}{1! \times (2-1)!} = \dfrac{2 \times 1}{1 \times 1} = 2.$

Exemple 7. On prend simultanément 6 cartes d'un jeu de 32 cartes . On obtient une main de 6 cartes, sans répétition ni ordre . Il s'agit donc d'une combinaison de 6 éléments pris parmi 32 éléments.

Le nombre de mains possibles est : $C_{32}^{6} = \dfrac{32!}{6! \times (32-6)!} = \dfrac{32!}{6! \times 26!} = 906192.$

4 Différents types de tirages

On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 jusqu'à 10. Pour tirer 3 boules de cette urne, il y a 3 types de tirages possibles :

— Tirage simultané : Lorsqu'on tire les 3 boules simultanément, toute possibilité est une combinaison de 3 éléments choisis parmi 10. Le nombre de tirages possible dans ce cas est : $C_{10}^{3} = \dfrac{A_{10}^{3}}{3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120.$

— Tirage successif avec remise : Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On dit qu'on a effectué un tirage successif avec remise. Chaque possibilité dans ce cas est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 10 et le nombre de tirages possibles est : $10^3 = 1000$.

— Tirage successif sans remise : Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre sans remettre aucune boule tirée dans l'urne. On dit qu'on a effectué un tirage successif sans remise. Chaque possibilité dans ce cas est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 10 et le nombre de tirages possibles est : $A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

— Résumé des situations :

Type de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénomb–rement
Successifs AVEC remise	*On tient compte de l'ordre*	*Un élément peut être tiré plusieurs fois*	n^p
Successifs SANS remise	*On tient compte de l'ordre*	*Un élément n'est tiré qu'une seule fois*	A_n^p
Simultanés	*L'ordre n'intervient pas*	*Un élément n'est tiré qu'une seule fois*	C_n^p

Remarque 4. Quand on utilise plusieurs combinaisons, faut-il additionner ou multiplier ? Cela dépend de la situation !

Concrètement :

1. Si les différentes étapes sont reliées par un "et", on multiplie
2. Si les différents cas sont reliés par un "ou", on additionne.

Exemple 8. Une urne contient 3 boules rouges, 4 noires et 1 blanche. On tire 3 boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer le nombre de tirages de trois boules de même couleur.
3. Calculer le nombre de tirages ne comprenant aucune boule rouge.

5 Formules

5.1 Formules relatives aux combinaisons

Théorème 1. *Pour tous n et p, tels que $0 \leq p \leq n$, on a :*

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
3. $C_n^{n-p} = C_n^p$
4. De plus si, $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n-1$,alors : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Démonstration. :

–Les 2 premières formules sont immédiate.

–On a $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times (n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!} = C_n^p$.

–Soit E un ensemble à $n+1$ éléments et a un élément de E.

Dénombrons les parties de E à $p+1$ éléments C_{n+1}^{p+1} en considérant les parties qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a.

Une partie de E à $p+1$ éléments de E contenant a contient p éléments choisis parmi les n éléments de E autres que a. Le nombre de ces parties est donc C_n^p.

Une partie de E à $p+1$ éléments de E ne contenant pas a contient $p+1$ éléments choisis parmi les n éléments de E autres que a. Le nombre de ces parties est donc C_n^{p+1}. On en déduit que :

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

□

Exemple 9. :

1. Calculons C_7^5 : On a : $C_7^5 = C_7^{7-5} = C_7^2 = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$.

5.2 Le triangle de Pascal

Grâce à la dernière série de formules $\left(C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}\right)$, on peut remplir le tableau suivant, appelé triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...

On a pour les cases rouges :$C_4^1 + C_4^2 = C_5^2$

- C_n^p n'est défini que pour $p \leq n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $C_n^n = 1$.
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $C_n^0 = 1$.
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

5.3 Le binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels. On a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad et \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Les coefficients des termes des membres de droite sont respectivement $(1,2,1)$ et $(1,3,3,1)$. On retrouve la deuxième ligne et la troisième ligne du triangle de Pascal. Ce résultat est général et se traduit par le théorème suivant.

Théorème 2. *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^p a^{n-p} b^p + ... + C_n^n b^n$$

Soit encore : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$.

Démonstration. :

Initialisation : Pour $n = 0$ immédiat. La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n tel que : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$, montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, soit

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p a^{n+1-p} b^p$$

On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \times (a+b) \\
&= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \,(a+b) \\
&= a \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p + b \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^{p+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_n^p a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p a^{n-p} b^{p+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_n^p a^{n+1-p} b^p + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} a^{n-i+1} b^i}_{p=i-1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_n^p a^{n-p+1} b^p + \underbrace{\sum_{p=1}^{n} C_n^{p-1} a^{n-p+1} b^p}_{i=p} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left(C_n^p + C_n^{p-1}\right) a^{n-p+1} b^p + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p a^{n-p+1} b^p + b^{n+1} \\
&= C_{n+1}^0 a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p a^{n+1-p} b^p + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p a^{n+1-p} b^p
\end{aligned}$$

On obtient alors $(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^{p} a^{n+1-p} b^{p}$ c'est–à-dire la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On a donc démontré que la proposition est vérifiée pour tout entier naturel.

$\square$

Exemple 10. Calcul de $(a+b)^6$

En lisant les valeurs des coefficients dans la ligne numéro 6 du triangle de Pascal, on obtient :

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Exemple 11. Nombre de sous-ensemble d'un ensemble E.

Soit un ensemble E qui contient n éléments.

Soit un ensemble E qui contient n éléments. Nous avons vu que le nombre de sous-ensemble à p éléments est égal à : C_n^p.

Le nombre de sous-ensemble - c'est à dire de 0 à n éléments - est donc de : $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$.

Or si l'on calcule : $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} \times 1^p = (1+1)^n = 2^n$.

FIN