Correction Série d′exercices sur les nombres complexes

2 BAC PC SVT

Yahya MATIOUI

13 août 2023

Exercice 1. .

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on considère les points A,B, C et D d'affixes respectives $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}+i$, $c=\overline{b}$ et $d=2i$

1. Ecrivons le nombre complexe a sous forme trigonométrique :

On a : $|a|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ donc

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{a=2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

2.

a. Vérifions que : $b-d=c$

On a

$$\begin{aligned} b-d &= 1+\sqrt{2}+i-2i \\ &= 1+\sqrt{2}-i \\ &= \left(\overline{1+\sqrt{2}+i}\right) \\ &= \overline{b} \\ &= c \end{aligned}$$

donc $\boxed{b-d=c}$

b. Montrons que : $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$:

On a :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}+1\right)(b-a) &= \left(\sqrt{2}+1\right)\left(1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}+1\right)\left(1+i-i\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{2}+i\sqrt{2}-2i+1+i-i\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}-2i+1+i \\ &= \sqrt{2}-i+1 \\ &= 1+\sqrt{2}-i \\ &= \left(\overline{1+\sqrt{2}+i}\right) \\ &= c \\ &= b-d \end{aligned}$$

donc $\boxed{\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d}$

Déduisons que les points A,B et D sont alignés

On a $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$ donc $\dfrac{b-a}{b-d}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\in\mathbb{R}$ donc

$\boxed{\text{les points } A,B \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$

3.

a. Vérifions que : $ac=2b$

On a

$$\begin{aligned} ac &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}-i\right) \\ &= \sqrt{2}+2-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2i+\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}+2+2i \\ &= 2+2\sqrt{2}+2i \\ &= 2\left(1+\sqrt{2}+i\right) \\ &= 2b \end{aligned}$$

donc $\boxed{ac = 2b}$

b. Déduisons que : $2arg\left(b\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$

On a : $ac = 2b$ donc

$$\begin{aligned} arg\left(ac\right) &\equiv arg\left(2b\right)\left[2\pi\right] \\ &\Leftrightarrow arg\left(a\right)+arg\left(c\right) \equiv arg\left(2\right)+arg\left(b\right)\left[2\pi\right] \\ &\Leftrightarrow arg\left(a\right)+arg\left(\overline{b}\right) \equiv arg\left(2\right)+arg\left(b\right)\left[2\pi\right] \\ &\Leftrightarrow arg\left(a\right)-arg\left(b\right) \equiv arg\left(2\right)+arg\left(b\right)\left[2\pi\right] \\ &\Leftrightarrow 2arg\left(b\right) \equiv arg\left(a\right)-arg\left(2\right)\left[2\pi\right] \end{aligned}$$

et comme $\begin{cases} arg\left(2\right) \equiv 0\left[2\pi\right] \\ \\ arg\left(a\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[2\pi\right] \end{cases}$ donc $\boxed{2arg\left(b\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[2\pi\right]}$

4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

a. Montrons que : $z' = \dfrac{1}{2}az$

On a

$$\begin{aligned}
R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_O &= e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_0) \\
\Leftrightarrow z' &= e^{i\frac{\pi}{4}} z \\
\Leftrightarrow z' &= \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) z \\
\Leftrightarrow z' &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z \\
\Leftrightarrow z' &= \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})\, z}{2} \\
\Leftrightarrow z' &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) z \\
\Leftrightarrow z' &= \frac{1}{2} a z
\end{aligned}$$

donc $\boxed{z' = \frac{1}{2}az}$

b. Déduisons que : $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

— On d'après l'expression complexe de la rotation R : $\frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \times 2b = b$, donc $R(C) = B$.

— On d'après l'expression complexe de la rotation R :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}aa &= \frac{1}{2}a^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \times 4i \\
&= 2i \\
&= d
\end{aligned}$$

donc $\boxed{R(C) = B \text{ et } R(A) = D}$.

c. Montrons que : $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) a$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{c-a} &= \frac{1+\sqrt{2}+i-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}-i-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \\
&= \frac{1+i-i\sqrt{2}}{1-i-i\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(1+i-i\sqrt{2}\right)\left(1+\left(i+i\sqrt{2}\right)\right)}{\left(1-\left(i+i\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(i+i\sqrt{2}\right)\right)} \\
&= \frac{1+\left(i+i\sqrt{2}\right)+i+i\left(i+i\sqrt{2}\right)-i\sqrt{2}-i\sqrt{2}\left(i+i\sqrt{2}\right)}{1-\left(i+i\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \frac{1+i+i\sqrt{2}+i-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{1-\left(-1-2\sqrt{2}-2\right)} \\
&= \frac{2i+2}{2+2\sqrt{2}+2} \\
&= \frac{1+i}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+i)\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}+2i-i\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{2+2i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

d'autre part, on a $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{2} = \dfrac{2+2i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

donc $\boxed{\dfrac{b-a}{c-a} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

Déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$

On a

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) \equiv arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)[2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a\right)[2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+arg\,(a)\,[2\pi]$$

et comme $\begin{cases} arg\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\equiv 0\,[2\pi] \\ \\ arg\,(a)\equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$ donc $\boxed{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]}$.

Exercice 2. .

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+4=0$

On a $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=4 \end{cases}$ donc $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times4=-12<0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : z_1 et z_2

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+i\sqrt{12}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

et comme $z_2=\overline{z_1}=\overline{\left(1+i\sqrt{3}\right)}=1-i\sqrt{3}$ donc

$$S=\left\{1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\right\}$$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$

a. Vérifions que : $a-d=-\sqrt{3}\,(c-d)$

On a

$$\begin{aligned}
a-d &= 1-i\sqrt{3}-\left(-2+2\sqrt{3}\right)\\
&= 1-i\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}\\
&= 3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}\\
&= 3-\sqrt{3}\,(2+i) \qquad (1)
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
-\sqrt{3}\,(c-d) &= -\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+i+2-2\sqrt{3}\right)\\
&= -3-i\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\\
&= 3-\sqrt{3}\,(2+i) \qquad (2)
\end{aligned}$$

d'après (1) et (2) on déduit donc : $\boxed{a-d=-\sqrt{3}\,(c-d)}$

b. Déduisons que les points A, C et D sont alignés

On a : $a-d=-\sqrt{3}\,(c-d)$ alors $\dfrac{a-d}{c-d}=-\sqrt{3}$ donc $\dfrac{a-d}{c-d}\in\mathbb{R}$, par suite les points A, C et D sont alignés.

3. On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$

Vérifions que : $z'=\dfrac{1}{2}az$

On a

$$\begin{aligned}
R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-z_O=e^{-i\frac{\pi}{3}}\,(z-z_O)\\
&\Leftrightarrow z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z\\
&\Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\\
&\Leftrightarrow z'=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)z}{2}\\
&\Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}z\times a\\
&\Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}az
\end{aligned}$$

donc $\boxed{z' = \frac{1}{2}az}$

4. Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que : $p = a - c$

a. Vérifions que : $h = ip$

On a d'après l'expression complexe de la rotation R

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2+2i) \\ &= \frac{1}{2}\left(2 + 2i - 2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2 + 2\sqrt{3} + i\left(2 - 2\sqrt{3}\right)\right) \\ &= 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} ip &= i(a-c) \\ &= i\left(1 - i\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} + i\right)\right) \\ &= i\left(1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i\right) \\ &= i\left(1 - \sqrt{3} - i\left(\sqrt{3} + 1\right)\right) \\ &= i\left(1 - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3} + 1\right) \\ &= 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

d'après (3) et (4) on déduit que : $\boxed{h = ip}$

b. Montrons que le triangle (OHP) est rectangle et isocèle en O.

On a

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right) &\equiv arg\left(\frac{h-z_O}{p-z_O}\right)[2\pi]\\
&\equiv arg\left(\frac{h}{p}\right)[2\pi]\\
&\equiv arg\left(\frac{ip}{p}\right)[2\pi]\\
&\equiv arg\left(i\right)[2\pi]\\
&\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

donc $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, par suite le triangle (OHP) est rectangle en O.

De plus on a : $OH = |h| = |ip| = |i|\times|p| = |p| = OP$, donc $OH = OP$ par suite le triangle (OHP) est isocèle en O, ceci signifie que $\boxed{\text{le triangle } (OHP) \text{ est rectangle et isocèle en}}$

Exercice 3. .

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

   On a $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 1\times 5 = -4 < 0$. Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 :

   $$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+i\sqrt{4}}{2} = \frac{2\,(2+i)}{2} = 2+i$$

   et comme $z_2 = (\overline{z_1}) = \left(\overline{2+i}\right) = 2-i$ donc $\boxed{S = \{2-i, 2+i\}}$

2. On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2+i$, $b = 2-i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$.

a. Montrons que : $\dfrac{a-\omega}{b-\omega} = i$

On a

$$\begin{aligned}\frac{a-\omega}{b-\omega} &= \frac{2+i-1}{2-i-1}\\ &= \frac{1+i}{1-i}\\ &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\ &= \frac{(1+i)^2}{1+1}\\ &= \frac{2i}{2}\\ &= i\end{aligned}$$

donc $\boxed{\frac{a-\omega}{b-\omega} = i.}$

b. Déduisons que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

— On a

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) &\equiv arg\left(\frac{a-\omega}{b-\omega}\right)[2\pi]\\ &\equiv arg\,(i)\,[2\pi]\end{aligned}$$

et comme $arg\,(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Ceci signifie que le triangle ΩAB est rectangle en Ω.

— On a $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$ alors $\left|\frac{a-\omega}{b-\omega}\right| = |i|$ par suite $\frac{|a-\omega|}{|b-\omega|} = 1$ d'ou $|a-\omega| = |b-\omega|$ et comme $\begin{cases}\Omega A = |a-\omega| \\ \Omega B = |b-\omega|\end{cases}$ c'est-à-dire $\Omega A = \Omega B$. Ceci signifie que le triangle ΩAB est isocèle en Ω.

$\boxed{\text{On déduit que le triangle } \Omega AB \text{ est rectangle et isocèle en } \Omega.}$

3. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Montrons que : $z' = iz + 1 - i$

On a

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega) \\ &\Leftrightarrow z' - 1 = \left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)(z-1) \\ &\Leftrightarrow z' - 1 = i(z-1) \\ &\Leftrightarrow z' - 1 = iz - i \\ &\Leftrightarrow z' = iz + 1 - i \end{aligned}$$

donc $\boxed{z' = iz + 1 - i}$

b. Vérifions que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

— On a d'après l'expression complexe de la rotation :

$$\begin{aligned} ia + 1 - i &= i(2+i) + 1 - i \\ &= 2i - 1 + 1 - i \\ &= i \\ &= c \end{aligned}$$

donc $R(A) = C$.

— On a d'après l'expression complexe de la rotation :

$$\begin{aligned} id + 1 - i &= i \times (-i) + 1 - i \\ &= 1 + 1 - i \\ &= 2 - i \\ &= b \end{aligned}$$

donc $R(D) = B$. Par suite $\boxed{R(A) = C \text{ et } R(D) = B}$

c. Montrons que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre

On a $\begin{cases} R(A) = C \\ R(D) = B \end{cases}$ alors $\begin{cases} \Omega A = \Omega C \\ \Omega D = \Omega B \end{cases}$ et comme $\Omega A = \Omega B$ donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ c'est-à-dire les points A, B,C et D appartiennent au même cercle de centre Ω.

Exercice 4. .

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.
On a $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

et $z_2 = \overline{z_1} = \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right\}}$

2. Soient les nombres complexes : $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   (a) Déterminons une forme algébrique de a :
   On a : $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Donc $\boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

   (b) Vérifions que : $\overline{a}b = \sqrt{3}$
   On a

$$\begin{aligned}\overline{a}b &= \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} + i\frac{3}{4} - i\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\overline{a}b = \sqrt{3}}$

3. Montrons que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport :
On a

$$\overline{a}b = \sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{\overline{a}a}_{=1} b = \sqrt{3}a \Leftrightarrow b = \sqrt{3}a \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\overrightarrow{OA}$$

$\boxed{\text{donc le point } B \text{ est l'image de } A \text{ par } h \text{ de centre } O \text{ et de rapport } \sqrt{3}}$

4. Soient z l'affixe d'un point M et z' l'affixe d'un point M' par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

(a) On écrit z' en fonction de z et a :
On a

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) + a \\ &\Leftrightarrow z' = i(z-a) + a \end{aligned}$$

donc $\boxed{z' = i(z-a) + a}$

(b) Montrons que : $d = a + 1$
On a

$$R(C) = D \Leftrightarrow d = i(c-a) + a \Leftrightarrow d = i(\overline{a} - a) + a$$

et comme : $\overline{a} - a = \left(\overline{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{i}{2} - \frac{i}{2} = -i$ donc $\boxed{d = i \times (-i) + a = a + 1}$

(c) Montrons que $ADIO$ est un losange
On a : $AD = |d - a| = |a + 1 - a| = 1$, $DI = |1 - (a+1)| = |-a| = \left|-e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$, $OI = |1 - 0| = 1$ et $AO = \left|0 - e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$. Donc $\boxed{AD = DI = OI = AO}$
Par suite le quadrilatère $ADIO$ est un losange.

5. .

(a) Vérifions que : $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$
On a

$$\begin{aligned} d - b &= a + 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{i}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{i}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) \end{aligned}$$

donc $\boxed{d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)}$

Déduisons un argument du nombre $d - b$:

On a

$$\begin{aligned} arg\,(d-b) &\equiv arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right)[2\pi] \\ &\equiv arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+arg\,(1-i)\,[2\pi] \end{aligned}$$

et comme : $\begin{cases} arg\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\equiv 0\,[2\pi] \\ \\ arg\,(1-i)\equiv \dfrac{-\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$ donc $\boxed{arg\,(d-b)\equiv \dfrac{-\pi}{4}\,[2\pi]}$

(b) Déterminons une forme trigonométrique du nombre $1-b$

On a

$$\begin{aligned} 1-b &= 1-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-isin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) \\ &= cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{1-b=cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+isin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)}$

(c) Déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)$

On a

$$\begin{aligned} \left(\overline{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right) &\equiv arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)[2\pi] \\ &\equiv arg\,(d-b)-arg\,(1-b)\,[2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{-19\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

donc $\boxed{\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{-19\pi}{12}\ [2\pi]}$

Exercice 5. .

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) z + 16 = 0$$

(a) Vérifions que le discriminant de l'équation (E) est : $\triangle = -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$

On a $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \\ c = 16 \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned}
\triangle &= b^2 - 4ac \\
&= \left[-2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\right]^2 - 4 \times 1 \times 16 \\
&= 4\left(2 + 2\sqrt{12} + 6\right) - 64 \\
&= 32 + 8\sqrt{12} - 64 \\
&= -32 + 8\sqrt{12} \\
&= -4\left(6 - 2\sqrt{12} + 2\right) \\
&= -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\triangle = -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2}$

(b) Déduisons les solutions de l'équation (E) :

On a $\triangle = -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$ et puisque $-4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 < 0$ alors $\triangle < 0$. Donc l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 telles que :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b + i\sqrt{-\triangle}}{2a} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + i\sqrt{4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2}}{2} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + 2i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{2} \\
&= \frac{2\left[\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\right]}{2} \\
&= \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

et $z_2 = \overline{z_1} = \left(\overline{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}\right) = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) - i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.
Donc $\boxed{S = \left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) - i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right\}}$

2. Soient les nombres complexes $a = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

   (a) Vérifions que : $b\overline{c} = a$, puis déduisons que $ac = 4b$

   On a

$$\begin{aligned} b\overline{c} &= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6} \\ &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \\ &= a \end{aligned}$$

   donc $\boxed{b\overline{c} = a}$

   Déduisons que : $ac = 4b$

   On a $b\overline{c} = a$ alors $b\overline{c}c = ac$, et comme $\overline{c}c = \left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = 4$,alors on obtient $\boxed{ac = 4b}$

   (b) Déterminons une forme trigonométrique des nombres complexes : b et c

   On a $|b| = |c| = 2$ donc

$$b = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

   et

$$c = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

   donc $\boxed{b = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \text{ et } c = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

   (c) Déduisons que : $a = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

   On a : $|a| = |b\overline{c}| = |b| \times |\overline{c}| = 2 \times 2 = 4$ et :

$$\begin{aligned} arg\left(a\right) &\equiv arg\left(b\overline{c}\right)\left[2\pi\right] \\ &\equiv arg\left(b\right) + arg\left(\overline{c}\right)\left[2\pi\right] \end{aligned}$$

et comme $arg(\overline{c}) \equiv -arg(c)\,[2\pi]$, alors $arg(\overline{c}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et $arg(b) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donc

$$\begin{aligned} arg(a) &\equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

donc $\boxed{a = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$

3. .

(a) Vérifions que : $z' = \dfrac{1}{4}az$

On a

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_O) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{12}}z \\ &\Leftrightarrow z' = \left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)z \\ &\Leftrightarrow z' = 4 \times \frac{1}{4}\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)z \\ &\Leftrightarrow z' = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \times \frac{1}{4}z \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{a}{4}z \end{aligned}$$

donc $\boxed{z' = \frac{a}{4}z}$

(b) Déterminons l'image du point C par la rotation R

on a d'après l'expression complexe de la rotation R : $\dfrac{a}{4}c = \dfrac{ac}{4} = b$.

$\boxed{\text{donc l'image du point } C \text{ par } R \text{ de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{12} \text{ est le point } B}$

(c) Déterminons la nature du triangle OBC

on a $R(C) = B \Leftrightarrow \begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{12}\,[2\pi] \end{cases}$.

$\boxed{\text{Donc le triangle } OBC \text{ est isocèle en } O}$

(d) Montrons que : $a^4 = 128b$

On a : $a = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$, et d'après la formule de Moivre on a :

$$
\begin{aligned}
a^4 &= \left(4\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)^4 \\
&= 4^4\left(cos\left(4\times\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(4\times\frac{\pi}{12}\right)\right) \\
&= 256\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= 256\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{256}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right) \\
&= 128b
\end{aligned}
$$

donc $\boxed{a^4 = 128b}$

Déduisons que les points O,B et D sont alignés :

On a

$$\frac{d-z_o}{b-z_o} = \frac{d}{b} = \frac{128b}{b} = 128 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{donc les points } O, B \text{ et } D \text{ sont alignés}}$

FIN