Convexité

TS

Yahya MATIOUI

2 août 2023

www.etude-generale.com

1 Fonction Convexe - Fonction Concave

1.1 Définition

Définition 1. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

1. La fonction f est convexe sur I si sa courbe (C_f) est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes .
2. La fonction f est concave sur I si sa courbe (C_f) est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes .

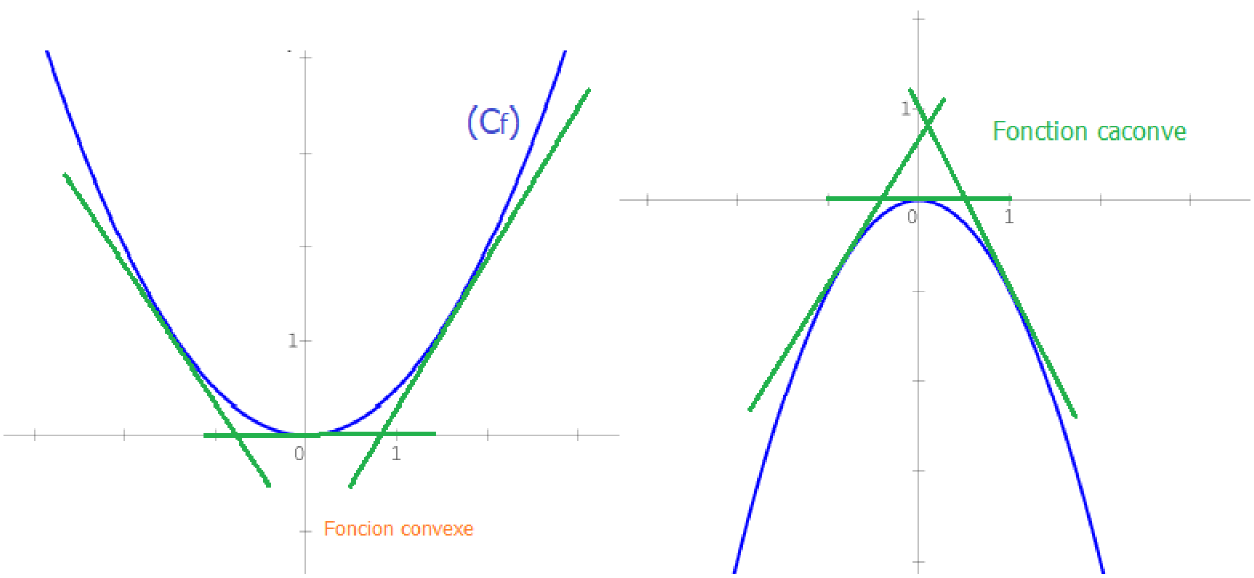

FIGURE 1 –

1.2 Propriétés

Proposition 1. :

1. *La fonction carré* $x \mapsto x^2$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction cube* $x \mapsto x^3$ *est concave sur* $]-\infty, 0]$ *et convexe sur* $[0, +\infty[$.
3. *La fonction inverse* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est concave sur* $]-\infty, 0[$ *et convexe sur* $]0, +\infty[$.
4. *La fonction racine carrée* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est concave sur* $[0, +\infty[$.

Démonstration. Admis

□

Proposition 2. :

1. *Une fonction* f *est convexe sur un intervalle* I, *si et seulement si, la dérivée* f' *est croissante sur* I.
2. *Une fonction* f *est concave sur un intervalle* I, *si et seulement si, la dérivée* f' *est décroissante sur* I.

Démonstration. Admis

□

Remarque 1. L'étude de la convexité se ramène donc à l'étude des variations de f'. Si f' est dérivable on a donc est amené a étudier le signe la dérivée de f' . Cette dérivée s'appelle la dérivée seconde de f et se note f''.

Proposition 3. *Soit* f *une fonction deux fois dérivables sur un intervalle* I.

1. *Pour que la courbe* (C_f) *de* f *soit convexe sur* I, *si et seulement si :* $(\forall x \in I), f''(x) \geq 0$.
2. *Pour que la courbe* (C_f) *de* f *soit concave sur* I, *si et seulement si :* $(\forall x \in I), f''(x) \leq 0$.

Exemple 1. Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$.

La fonction f et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = e^x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}), f''(x) = e^x > 0$. Donc f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2. Soit f la fonction logarithme népérien définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = lnx$.

La fonction f et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $(\forall x \in]0, +\infty[), f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $(\forall x \in]0, +\infty[), f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$. Donc f est une fonction concave sur $]0, +\infty[$.

Exemple 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

Étudier la convexité de la fonction f.

- f est une fonction polynôme, donc elle est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
  - On a $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = x^2 - 18x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}), f''(x) = 2x - 18$.
  - Étudions le signe de $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{2} = 9$$

x	$-\infty$		9		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

FIGURE 2 –

Donc f est concave sur $]-\infty, 9]$ et f est convexe sur $[9, +\infty[$.

2 Point d'inflexion

Définition 2. Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point ou la courbe traverse sa tangente.

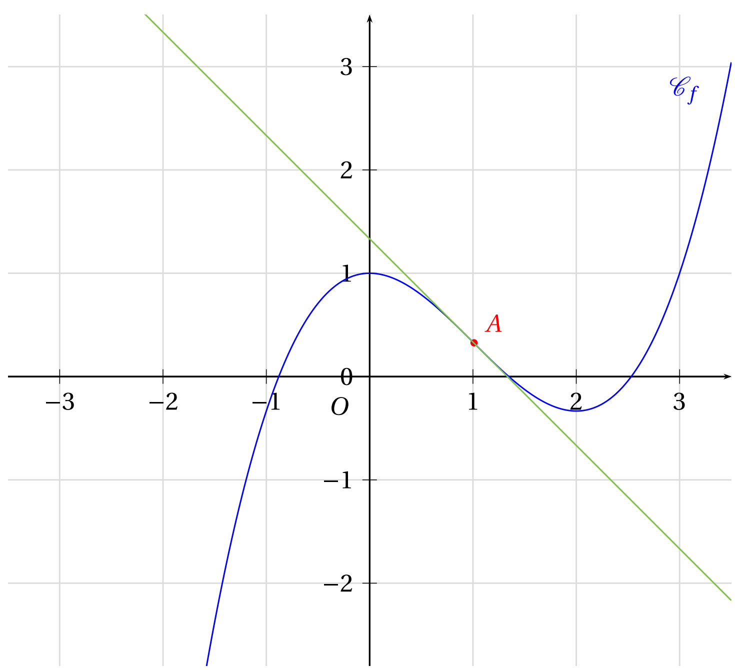

FIGURE 3 –

Proposition 4. *Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.*

Exemple 4. On considère la fonction cube $x \mapsto x^3$.

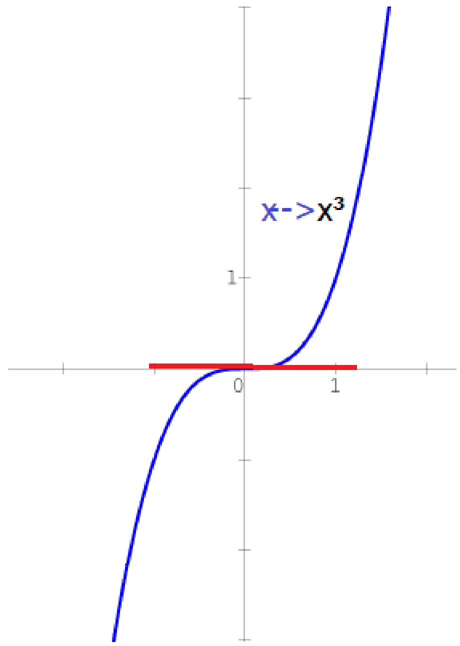

FIGURE 4 –

Pour $x \leq 0$, la courbe est au-dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.
L'origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Proposition 5. *Soit f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I, de courbe représentative (C_f). Le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.*

FIN