Continuité des Fonctions

TS

Yahya MATIOUI

28 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 Notion et continuité

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1.1 Définition

Définition 1. On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I lorsque le tracé de sa courbe représentative sur l'intervalle I se fait sans lever le crayon.

Remarque 1. Cette définition est une moyenne de se représenter la continuité mais cela ne constitue en rien une définition rigoureuse de cette dernière.

Reconnaître graphiquement une fonction continue

Exemple 1. f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-dessous :

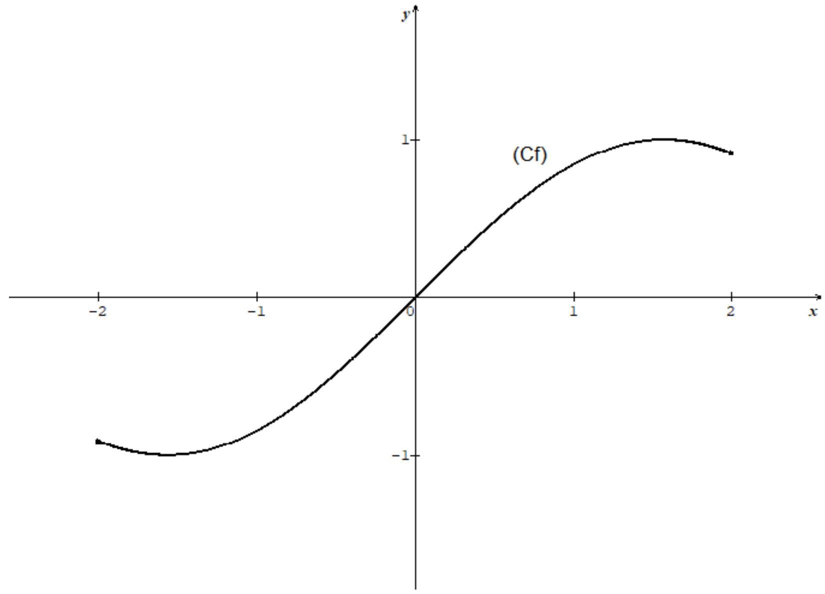

FIGURE 1 –

Cette courbe se trace sans lever le crayon sur I donc la fonction f est continue sur I.

g est une fonction définie sur l'intervalle $I = [-2, 2]$ dont la courbe (C_g) est représentée ci-dessous :

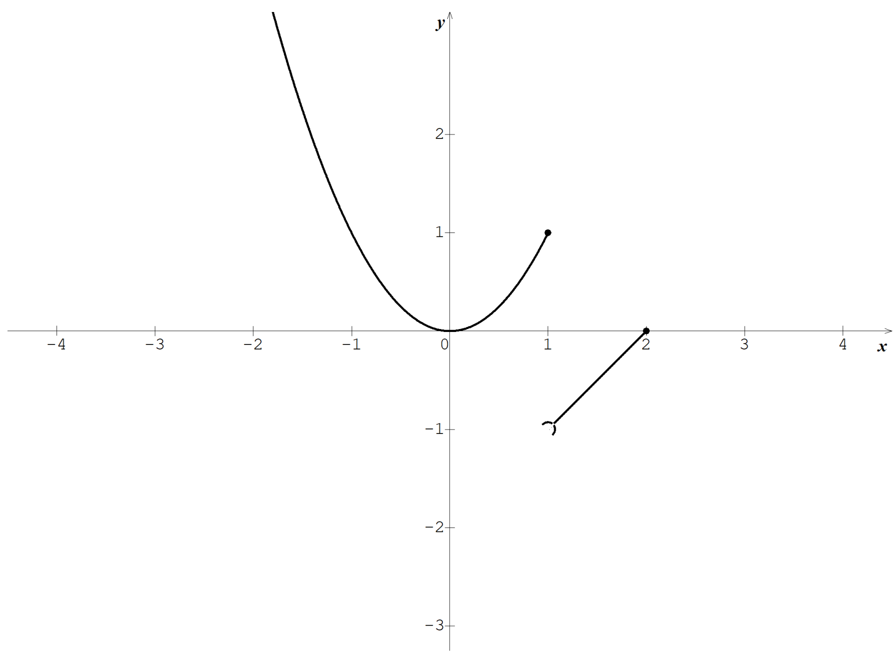

FIGURE 2 –

Cette courbe ne peut pas etre tracée sans lever le crayon au point d'abscisse 1 donc la fonction g n'est pas continue sur I. (par contre elle est continue sur les intervalles $[-2, 1]$ et $]1, 2]$)

Définition 2. Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

1. f est continue en a si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque 2. Dans certains exercices, il faudra calculer la limite à droite et la limite à gauche de la fonction puis vérifier que ces deux limites valent $f(a)$.

Exemples et contre-exemples :

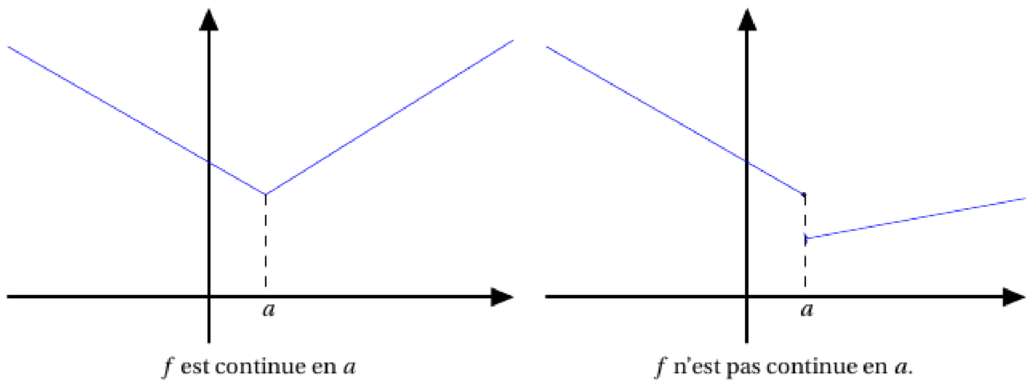

FIGURE 3 –

Exemple 2. Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Etudions la continuité de f au point $x_0 = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} \\
&= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1} = 0
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$,par suite f est continue au point $x_0 = 0$.

1.2 Lien entre dérivabilité et continuité

Proposition 1. *Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.*

Remarque 3. La réciproque est bien évidemment fausse : toutes les fonctions continues sur un intervalles ne sont pas toujours dérivables.

1.3 Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle donné.

Fonction	Intervalle
$x \mapsto \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$
polynome	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto sinx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cosx$	$\mathbb{R}$

1.4 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 2. *f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.*

1. *$f + g$, $f \times g$, $f^n(n \in \mathbb{N})$et e^f sont continues sur I.*
2. *Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*
3. *Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.*

Exemple 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 3 & si \quad x < -1 \\ f(x) = x^2 + 4 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ f(x) = x^2 - 5 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto 2x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$,car c'est une fonction polynome donc f est continue sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.
- La fonction $x \mapsto x^2 + 4$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynome donc f est continue sur l'intervalle $[-1, 1[$.

— La fonction $x \mapsto x^2 - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

— On étudie la continuité de f en -1 et 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 4 = 5$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - 5 = -4$$

et comme $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, donc la limite de f en 1 n'existe pas. Donc la fonction f n'est pas continue en 1.

— On a

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 + 4 = 5$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 2x^2 + 3 = 5$$

et comme $f(-1) = 5$,donc $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1)$. Par suite la fonction f est continue en -1.

— On conclut que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. (La fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$)

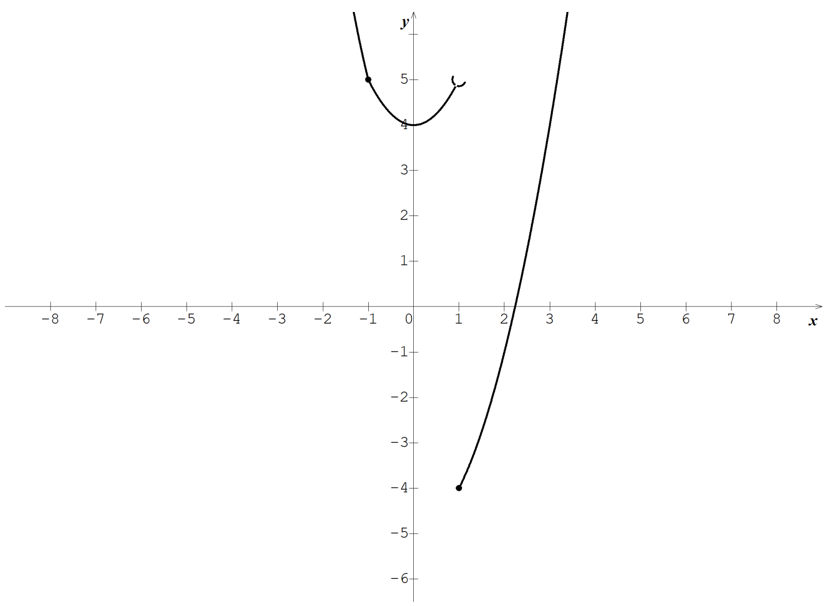

Figure 4 –

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Exemple 4. On donne le tableau de variations de la fonction f.

x	-4		-3		-1		1
f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

Figure 5 –

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type $f(x) = k$.

1. L'équation $f(x) = 18$ possède 1 solution comprise dans l'intervalle $]-1, 1[$.
2. L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $]-4, -3[$, $]-3, -1[$ et $]-1, 1[$.
3. L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.
4. L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3, l'autre comprise dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Théorème 1. *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

–On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$. Ainsi l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution appartenant à $[a, b]$.

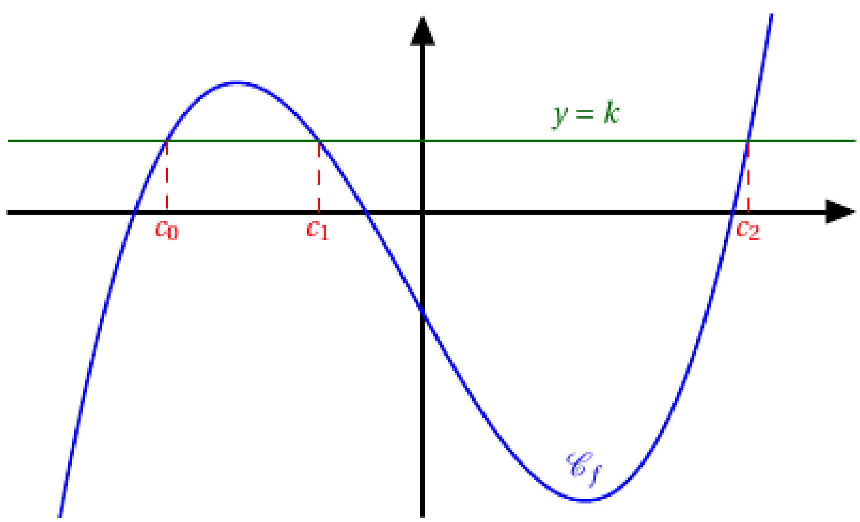

Figure 6 –

–Dans le cas ou la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$, alors la solution est unique.

Démonstration. Admis

□

Exemple 5. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = x + cosx$.

La fonction f est continue car c'est la somme de deux fonctions continues $\left(x \mapsto x \quad et \quad x \mapsto cosx \right)$ et de plus $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \\ f(\pi) = \pi - 1 \end{cases}$. Puisque 2 est compris entre $f(0)$ et $f(\pi)$ alors il existe au moins un réel $c \in [0, \pi]$ tel que $f(c) = 2$. Cela signifie que l'équation $x + \cos x = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Ici, on n'a pas la stricte monotonie de f, donc on n'a pas l'unicité de la solution.

Dans la pratique

Pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a, b]$,on démontre que :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f change de signe sur $[a, b]$,
3. f est strictement monotone sur $[a, b]$.

Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent. Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

Remarque 4. On généralise ce théorème à des fonctions définies sur des intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, +\infty[$. On est alors amener à déterminer la limite de la fonction f en $\pm\infty$.

Exemple 6. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1, 2[$.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[1, 2]$, car une fonction polynome est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a $\begin{cases} f(1) = -1 < 0 \\ \\ f(2) = 3 > 0 \end{cases}$ donc la fonction f change de signe sur l'intervalle $[1, 2]$.
- On a $f'(x) = 3x^2 - 2x$, donc $(\forall x \in [1, 2])$, $f'(x) > 0$. Par suite la fonction f est strictement croissante sur $[1, 2]$.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet alors une unique solution sur l'intervalle $]1, 2[$.

Principe de la méthode de dichotomie

Exemple 7. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ et on a $f(0) \times f(1) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0 < \alpha < 1$. Détermnons un encadrement de α de longueur $0,25$.

— Le centre du $[0,1]$ est $\dfrac{1}{2}$ et on a $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-9}{8}$. Donc la fonction f <u>change de signe</u> sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, par suite $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$. $\left(\textit{longueur} \quad \textit{est} \quad 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \right)$.

— Le centre du $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ est $\dfrac{3}{4}$ et on a $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{-17}{64}$. Donc la fonction f <u>change de signe</u> sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$, par suite $\dfrac{3}{4} < \alpha < 1$. $\left(\textit{longueur} \quad \textit{est} \quad 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} = 0,25 \right)$

— Ainsi $\dfrac{3}{4} < \alpha < 1$.

FIN