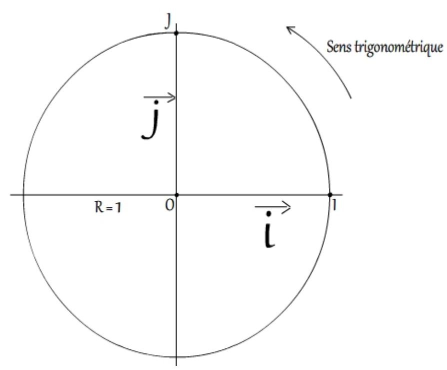
Fonctions trigonométriques

Cercle trigonométrique

Définition du cercle trigonométrique

Définition 1 *Dans un repère orthonnormé* $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$*. On appelle cercle trigonométrique le cercle :*

- *de centre* O *l'origine du repère.*
- *de rayon* $R = 1$
- *orienté positivement. (Le sens positif est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre)*
- *et admet une origine* I*.*



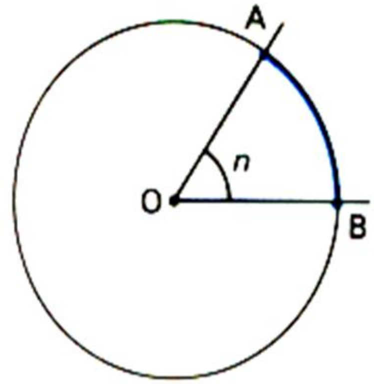
Le plan orienté

Définition 2 *Le plan est dit orienté lorsque tous les cercles sont orientés comme un cercle trigonométrique.*

Dans la suite le plan est orienté.

La mesure en radian

Définition 3 *Le radian est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle* *trigonométrique.*



Propriété 4 *La mesure d'un angle en radian est proportionnelle à sa mesure en degrés.*

Tableau de proportionnalité

Mesure en degré	180	n
Mesure en radian	π	α

Ceci signifie que

$$\frac{n}{\alpha} = \frac{180}{\pi}$$

Donc

$$\alpha = \frac{\pi \times n}{180}$$

Exemple 5 *Convertir en radian la mesure d'angle* : 45°

■ *On a*

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi \times n}{180} \\ &= \frac{\pi \times 45}{180} \\ &= \frac{\pi \times 45}{4 \times 45} \\ &= \frac{\pi}{4} rad \end{aligned}$$

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en degrés	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Remarque 6 .

■ *L'angle plat a pour mesure, en degré* 180 (180°), *en radian* π *(notation* : π *rad) ; en grade (notation :* 200*gr).*

■ *Pour un angle donné, soit a sa mesure en degré, b sa mesure en radian, c sa mesure en grade, on a alors la formule de conversion*

$$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi} = \frac{c}{200}$$

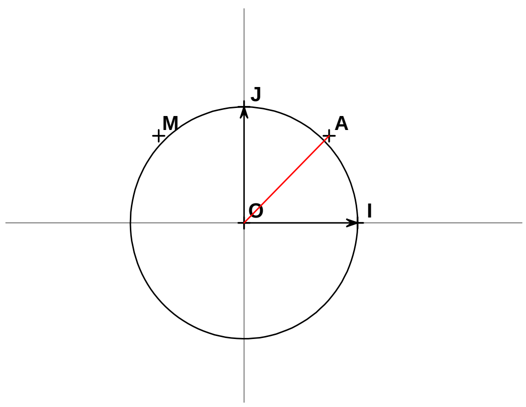
Dans la suite on utilise souvent la mesure en radian.

Abscisses curvilignes

Soit (C) un cercle trigonométrique lié au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et soit A un point de (C) tel que α est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOA}$ en radian et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Imaginons un point M mobile sur le cercle (C).

Le point M prend le départ en I.



1ère cas : M parcourt le cercle (C) dans le sens positif.

- ■ Lorsque M coïncide avec A pour la première fois, il a parcouru un chemin de longueur α.
- ■ La deuxième fois que M coincide avec A la mesure du trajet parcouru est $\alpha + 2\pi$ (un tour en plus de la longueurα).
- ■ La troisième fois $\alpha + 4\pi$, ..., la $(k+1)$ fois $\alpha + 2k\pi$,$(k \in \mathbb{N})$.

2ème cas : M parcourt le cercle (C) dans le sens négatif.

- ■ Lorsque M coïncide la première fois avec le point A, la mesure du chemin parcouru est $2\pi - \alpha$.
- ■ La deuxième fois que M passe en A, il a parcouru un chemin de longueur $4\pi - \alpha$.
- ■ La troisième fois $6\pi - \alpha$, ..., la k' fois $2k'\pi - \alpha$,$(k' \in \mathbb{N})$.

Pour distinguer entre les cas précédents, le point M a parcouru un chemin de longueur $\alpha + 2k\pi$ dans le premier cas et un chemin de longueur $-(-\alpha + 2k'\pi)$, c'est-à-dire $\alpha - 2k'\pi$ dans le deuxième cas. Ceci signifie que dans tous les cas une mesure du chemin de parcourt de I à A est $\alpha + 2k''\pi$ tel que $k'' \in \mathbb{Z}$.

Définition 7 .

- *Soit (C) un cercle trigonométrique lié au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et soit A un point de (C) tel que α est une mesure de l'angle $\widehat{IOA}$ en radian. Tout nombre qui s'écrit sous la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, est appelé une abscisse curviligne du point M.*

- *Parmi les abscisses curvilignes du point M, il existe une seule abscisse curviligne appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, appelée abscisse curviligne principale du point M.*

Exemple 8 *Déterminer l'abscisse curviligne principale du point M qui admet α comme l'un de ses abscisses curvilignes dans le cas suivant :*

$$\alpha = \frac{7\pi}{2}$$

Méthode .

Notons α_0 l'abscisse curviligne principale du point M, puisque α est une abscisse curviligne du point M alors : $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ensuite : $\alpha_0 = \alpha - 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, $\alpha_0 \in]-\pi, \pi]$, donc : $-\pi \prec \alpha_0 \preceq \pi$, par ailleurs :

$$\begin{aligned}
-\pi \quad &\prec \quad \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \preceq \pi \\
&\iff \quad -1 \prec \frac{7}{2} - 2k \preceq 1 \\
&\iff \quad -1 - \frac{7}{2} \prec -2k \preceq -\frac{7}{2} + 1 \\
&\iff \quad -\frac{9}{2} \prec -2k \preceq \frac{-5}{2} \\
&\iff \quad \frac{5}{4} \preceq k \prec \frac{9}{4} \\
&\iff \quad 1,25 \preceq k \prec 2,25
\end{aligned}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 2$. Donc

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \\
&= \frac{7\pi}{2} - 2 \times 2 \times \pi \\
&= \frac{-\pi}{2} \in]-\pi, \pi]
\end{aligned}$$

Ceci signifie que $\frac{-\pi}{2}$ est l'abscisse curviligne principale du point M.

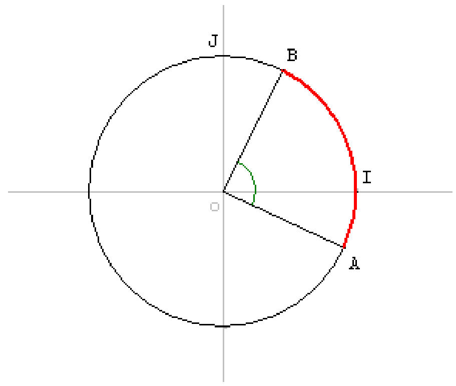
Angles orienté de deux vecteurs non nuls

Mesures d'un angle orienté de deux vecteurs

Approche

- Mesures positives

(C) est un cercle trigonométrique de centre O, A et B sont deux points de (C). Lorsqu'on fait tourner $\overrightarrow{OA}$ dans le sens direct pour l'amener sur $\overrightarrow{OB}$, le point A parcourt un arc de cercle de longueur α. On convient de dire que α est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.



On peut faire un tour de plus, toujours dans le sens direct. Le point A parcourt un arc de cercle de longueur $\alpha + 2\pi$. On convient de dire que $\alpha + 2\pi$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

Si on effectue k tours de cercle, toujours dans le sens direct, le point A parcourt un trajet de longueur $\alpha + 2k\pi$, ce nombre est aussi une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

■ Mesures négatives

Pour amener $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$ on peut aussi parcourir le cercle dans le sens indirect. Alors lorsque $\overrightarrow{OA}$ arrive sur $\overrightarrow{OB}$ pour la première fois, le point A parcourt un arc de cercle de longueur $2\pi - \alpha$. Pour indiquer que l'on parcourt le cercle dans le sens indirect sans l'écrire, on convient de compter ce trajet négativement et de dire que $-(2\pi - \alpha)$, c'est-à-dire $\alpha - 2\pi$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

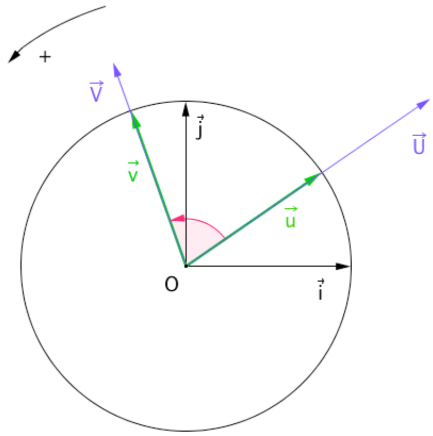
On peut faire un tour de plus, toujours dans le sens indirect que l'on compte négativement. On convient de dire que $-(2\pi - \alpha) - 2\pi$, c'est-à-dire $\alpha - 4\pi$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

Si on effectue k' tours de cercle, toujours dans le sens indirect, que l'on compte négativement, on obtient pour mesure $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ le nombre réel $-(2\pi - \alpha) - 2k'\pi$ ce qui s'écrit encore $\alpha + 2(-k' - 1)\pi$.

Cas général

Définition 9 *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls alors l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'angle des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ sera notée par :*

$\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$.



Notation 10 *L'une des mesures de l'angle orienté* $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ *sera notée* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ *et on écrit* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = \alpha + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *ou* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) \equiv \alpha\,[2\pi]$. $\Big($*se lit* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ *est congru à* α *modulo* $2\pi\Big)$

Propriété 11 *Parmi toutes les mesures* $\alpha + 2k\pi$*, il en existe une et une seule dans l'intervalle* $]-\pi,\pi]$*. Cette mesure est appelée la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$.

Remarque 12 *Si* α *est une mesure principle de l'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$*. Tout nombre de la forme* $\alpha + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *est aussi une mesure du même angle et on écrit :*

$$\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = \alpha + 2k\pi \quad, k \in \mathbb{Z} \iff \left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) \equiv \alpha\,[2\pi]$$

Exemple 13 *Sachant que :* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) \equiv -\frac{123\pi}{5}\,[2\pi]$. *Déterminer l'abscisse curviligne principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$.

■ *On a :* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = -\frac{123\pi}{5} + 2k\pi$*, tel que* $k \in \mathbb{Z}$*. Ceci signifie que les mesures d'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$ *sont les nombres :* $-\frac{123\pi}{5} + 2k\pi$ *tel que* $k \in \mathbb{Z}$.

Pour déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$ *il suffit de trouver la valeur de* k *dans* $\mathbb{Z}$ *tel que*

$$\begin{aligned} -\pi \quad &\prec \quad -\frac{123\pi}{5} + 2k\pi \preceq \pi \\ &\iff \quad 11,8 \prec k \preceq 12,8 \end{aligned}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k = 12$*. Donc*

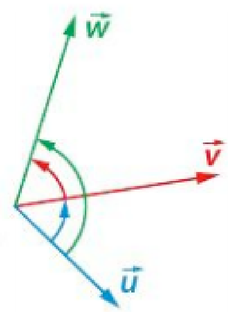
$$-\frac{123\pi}{5} + 2k\pi = -\frac{123\pi}{5} + 2 \times 12 \times \pi = \frac{-3\pi}{5}$$

D'où $\frac{-3\pi}{5}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$.

Propriétés des angles orientés

Propriété 14 *(Relation de chasles)*
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs on a :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) [2\pi]$$



Résultats 15 *Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

1. $\left(\overline{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) [2\pi]$
2. $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) [2\pi]$
3. $\left(\overline{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \pi\, [2\pi]$
4. $\left(\overline{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \pi\, [2\pi]$

Exemple 16 *Sachant que :* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \equiv \frac{-\pi}{9} [2\pi]$ *et* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$
Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \quad et \quad \left(\overline{-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}}\right)$$

- *On cherche la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$:

  En utilisant la relation de chasles, on obtient

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) [2\pi]$$

comme $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \equiv \frac{-\pi}{9} [2\pi]$ *et* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$, *donc*

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) &\equiv \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{9} [2\pi] \\ &\equiv \frac{-5\pi}{36} [2\pi] \end{aligned}$$

Ceci signifie que $\frac{-5\pi}{36}$ est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

■ *On cherche la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$:

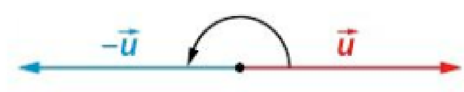
On a
$$\left(\overline{-\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overline{-\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}}\right) - \left(\overline{\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}}\right)\,[2\pi]$$

comme $\left(\overline{-\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}}\right) \equiv -\pi\,[2\pi]$ *et* $\left(\overline{\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}}\right) \equiv \frac{-5\pi}{36}\,[2\pi]$, *donc*

$$\begin{aligned}\left(\overline{-\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}}\right) &\equiv -\pi + \frac{5\pi}{36}\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{-31\pi}{36}\,[2\pi]\end{aligned}$$

Ceci signifie que $\frac{-31\pi}{36}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\overline{\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}}\right)$.

Remarque 17 *Pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *non nul, on a :*



■ $\left(\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}}\right) \equiv 0\,[2\pi]$

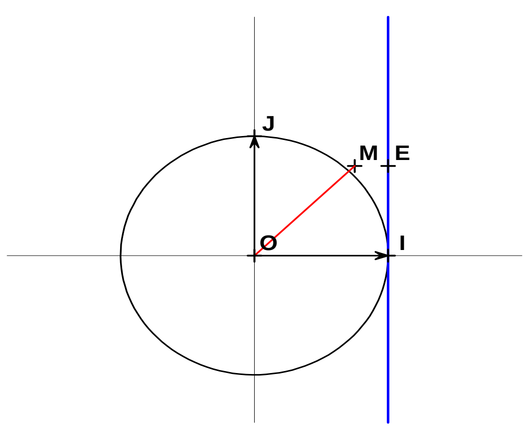
■ $\left(\overline{\overrightarrow{u},-\overrightarrow{u}}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$

Les lignes trigonométriques

cosinus, sinus et tangente d'angle

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ le repère orthonormé associé à (C) en I.

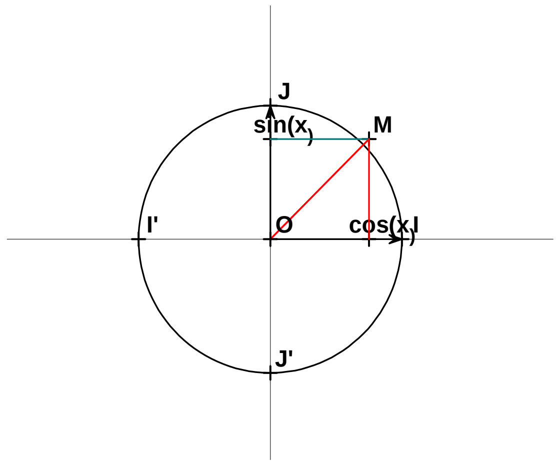
soit x un réel, M un point de (C) ayant x pour abscisse curviligne.



Définition 18 .

- *L'abscisse du point M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ s'appelle cosinus de x et on le note* $\cos x$.
- *L'ordonnée du point M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ s'appelle sinus de x et on le note* $\sin x$.

Propriété 19 *Soit M un point du cercle trigonométrique (C) d'abscisse curviligne x, on a :*



- $\overrightarrow{OM} = \cos x \overrightarrow{i} + \sin x \overrightarrow{j}$. $\left(\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}\right)$.
- $OM = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$ *et* $OM = 1$, *donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- *L'abscisse du point M appartient au segment $[I'I]$ donc* $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- *L'ordonnée du point M appartient au segment $[J'J]$ donc* $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Si x est une abscisse curviligne de M alors $x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ est aussi abscisse curviligne de M donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \textit{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

Exemple 20 *Calculer* $\cos x$ *si* $\sin x = \frac{-4}{5}$ *et* $\pi \prec x \prec \frac{3\pi}{2}$.

On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *donc :* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, *c'est-à-dire :*

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

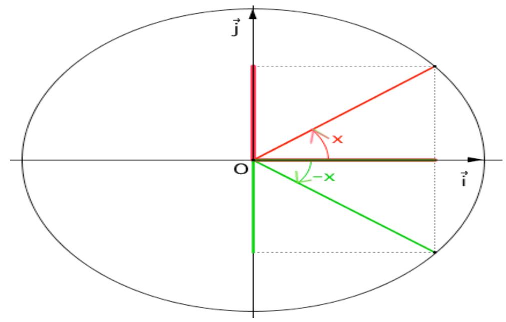
comme $\pi \prec x \prec \frac{3\pi}{2}$, *donc* $\cos x \prec 0$, *c'est-à-dire :* $|\cos x| = -\cos x$, *d'où*

$$\begin{aligned} \cos x &= -\sqrt{1 - \sin^2 x} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)^2} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\ &= \frac{-3}{5} \end{aligned}$$

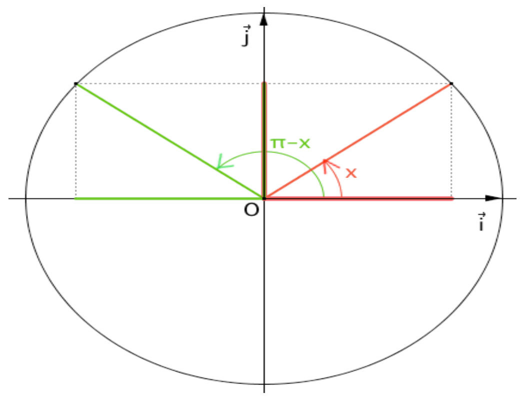
cosinus et sinus d'angle associés

Propriété 21 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

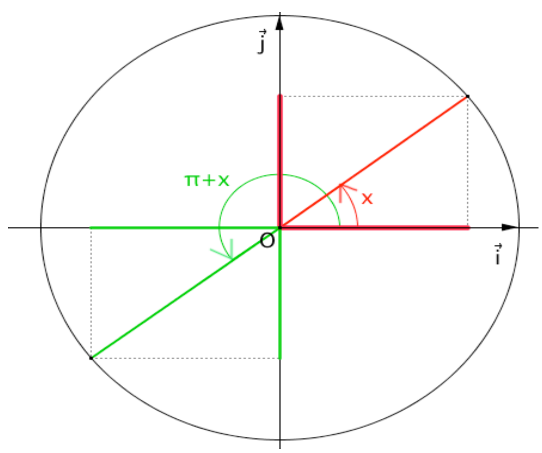
1. $\cos(-x) = \cos x$ *et* $\sin(-x) = -\sin x$



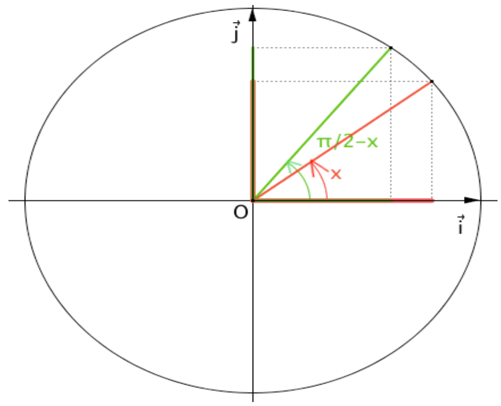
2. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ *et* $\sin(\pi - x) = \sin x$



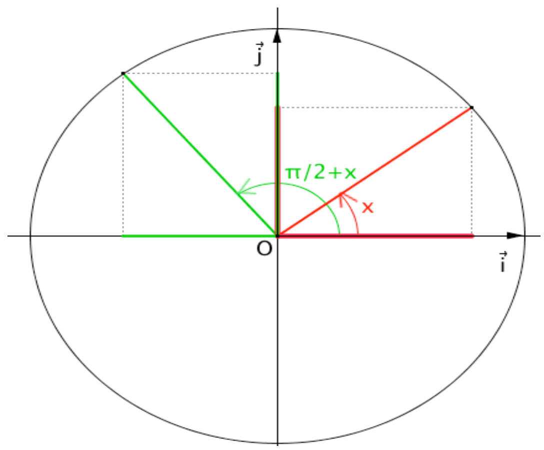
3. $\cos(\pi + x) = -\cos x$ *et* $\sin(\pi + x) = -\sin x$



4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$



5. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$



Exemple 22 *Soit x un réel, simplifier les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned} A &= \cos(\pi+x)-\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ B &= \cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right) \\ C &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(x-3\pi) \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} A &= \cos(\pi+x)-\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ &= -\cos x-(-\cos x)+\sin x \\ &= -\cos x+\cos x+\sin x \\ &= \sin x \end{aligned}$$

■

$$
\begin{aligned}
B &= \cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi+4\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{8\pi-\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x+2\pi\right)+\sin\left(x-4\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\
&= -\sin x+\cos x
\end{aligned}
$$

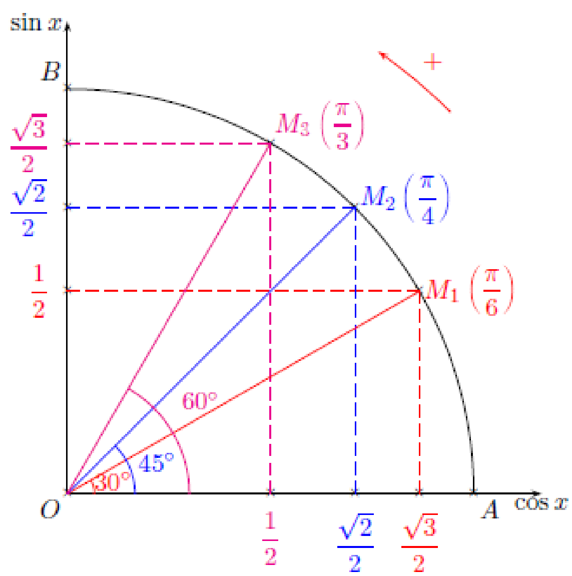
■

$$
\begin{aligned}
C &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos\left(x-3\pi\right)\\
&= \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)+\cos\left(x-2\pi-\pi\right)\\
&= \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(x-\pi\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\pi-x\right)\\
&= \sin x-\cos x
\end{aligned}
$$

Valeurs remarquables

Il est utile de connaître ou de savoir retrouver rapidement les valeurs des sinus et cosinus des angles suivants :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas



Exemple 23 *Calculer* : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)$.

■

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

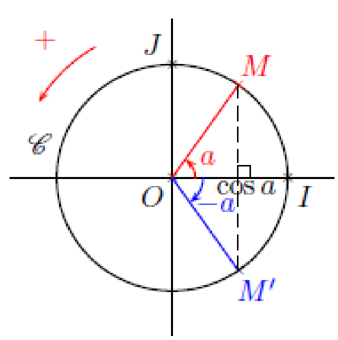
Résolution d'équations trigonométriques

Équation trigonométrique du type $\cos x = a$.

Propriété 24 *Soit a un réel.*
On considère l'équation (E_1) : $\cos x = a$.

- *Si : $|a| \succ 1$, il n'y a pas de solution.*
- *Si : $|a| \leq 1$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\alpha$. L'équation devient alors $\cos x = \cos\alpha$ et on a donc :*

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \quad\textit{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

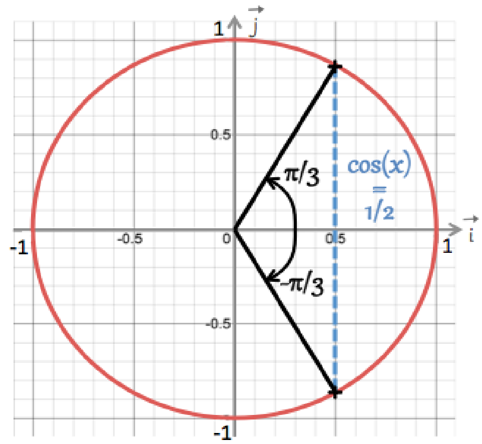


Alors les solutions d'équation (E_1) *dans* $\mathbb{R}$ *sont les réels :* $\alpha + 2k\pi$ *ou* $-\alpha + 2k\pi$ *tel que* $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 25 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E) : \cos x = \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$.



Donc

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

Donc les solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *sont :*

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemple 26 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E) : \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

On a : $\frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$. *Donc*

$$\cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *sont :*

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Équations particulières

$$\begin{array}{rcl} \cos x & = & 1 \iff x = 2k\pi \ /k \in \mathbb{Z} \\ \cos x & = & -1 \iff x = \pi + 2k\pi \ /k \in \mathbb{Z} \\ \cos x & = & 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

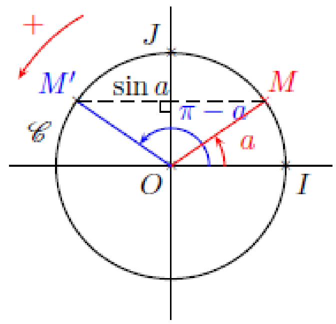
Équation trigonométrique du type $\sin x = a$.

Propriété 27 *Soit* a *un réel.*

On considère l'équation $(E_2) : \sin x = a$.

- *Si* : $|a| \succ 1$, *il n'y a pas de solution.*
- *Si* : $|a| \leq 1$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $a = \sin\alpha$. *L'équation devient alors* $\sin x = \sin\alpha$ *et on a donc* :

$$\left\{\begin{array}{c} x = \alpha + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$



Alors les solutions d'équation (E_2) *dans* $\mathbb{R}$ *sont les réels* : $\alpha + 2k\pi$ *ou* $\pi - \alpha + 2k\pi$ *tel que* $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 28 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E) : \sin x = \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. *Donc*

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est* :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**