CALCUL DES PROBABILITES

2 BAC PC-SVT

Yahya MATIOUI

10 août 2023

www.etude-generale.com

1 Dénombrement

1.1 Ensemble fini

Définition 1. :

1. Un ensemble E est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
2. Le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de l'ensemble et il est noté : $card\,(E)$ ou $|E|$.
3. Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est-à-dire en déterminer le cardinal.

Exemple 1. :

1. L'ensemble E des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $card\,(E) = 11$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

Définition 2. On dit que deux ensembles sont disjoints, s'ils ont aucun éléments en commun.

Proposition 1. *Soient E et F deux ensembles finis.*

1. $card\,(E \bigcup F) = card\,(E) + card\,(F) - card\,(E \bigcap F)$.
2. *Si E et F sont disjoints alors :* $card\,(E \bigcup F) = card\,(E) + card\,(F)$.
   (a) *Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'ensemble disjoints deux à deux alors*
   $$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} Xi\right) = \sum_{i=1}^{n} card\,(X_i)$$
3. *Si $E \subset F$ alors :* $card\,(E) \leq card\,(F)$ *et* $card\,(F \setminus E) = card\,(F) - card\,(E)$.

1.2 Principe Fondamental du dénombrement (Principe du Produit)

1.2.1 Introduction

On lance dans l'air une pièce de monnaie 3 fois successives. Quel est le nombre total de cas possibles ?

- Le premier lancer dispose de 2 possibilités.
- Le deuxième lancer dispose de 2 possibilités.
- Le troisième lancer dispose de 2 possibilités.
  - Donc le nombre total de cas possibles est : $N = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Proposition 2. *(Principe du produit)*

On considère une expérience aléatoire formée de deux choix, si le 1*er choix offre* n_1 *possibilités et le* 2*ème choix offre* n_2 *possibilités, alors le nombre de choix total est :*

$$N = n_1 \times n_2.$$

Remarque 1. Le principe du produit se généralise à une expérience aléatoire formée de p choix avec $p \geq 2$. Dans ce cas le nombre de choix total est : $N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$.

Exemple 2. De combien de manières peut-on garer 4 voitures dans 6 places vides dans un parking ?

- Pour la 1ère voiture on dispose de 6 possibilités
- pour la 2ème il en reste 5, pour la 3ème il en reste 4 et pour la 4ème il en reste 3.
  - D'après le principe du produit le total des possibilités pour garer les 4 voitures est : $N = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Exemple 3. Soit $E = \{0, 1, 2, 4\}$. Déterminer le nombre total de nombres ayant 4 chiffres parmi les éléments de E.

On a

milles	cent	dix	unité
3	4	4	4

.

- D'après le principe du produit le total des possibilités est

$$N = 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192.$$

1.3 Arrangements et Combinaisons

1.3.1 Arrangements sans répétition

Introduction

On veut former un nombre n de 2 chiffres $n = ab$ choisis parmi $1, 2$ et 3.
On exige de plus que tous les chiffres soient distincts deux à deux.
Toute possibilité est un couple (a, b) avec a et b sont distincts deux à deux et choisis parmi les éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

$$1 \xrightarrow[3]{2} \begin{cases} 12 \\ \\ 13 \end{cases} ,2 \xrightarrow[3]{1} \begin{cases} 21 \\ \\ 23 \end{cases} \quad et\ 3 \xrightarrow[2]{1} \begin{cases} 31 \\ \\ 32 \end{cases}$$

Toute possibilité est appelée arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 3. Donc le nombre total de possibilités est 6.

Proposition 3. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$. Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n est :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 4. Calculer : A_5^2, A_4^3 et A_6^4.
On a

— $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20.$
— $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4!}{1!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24.$
— $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360.$

Remarque 2. On a $A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)}_{p \ \ facteurs}$.

Remarque 3. Si $p = n$ alors tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n est appelé permutation à n éléments. Le nombre de permutations à n éléments est :

$$A_n^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1}_{n \ \ facteurs}$$

Ce nombre est noté $n!$ qu'on lit factoriel n, donc $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Exemple 5. De combien de manières on peut ranger 5 livres dans 5 tiroirs de sorte que chaque tiroir ne peut contenir plus d'un livre ?

Toute possibilité est une permutation à 5 éléments, donc le nombre total de possibilités pour ranger les 5 livres dans les 5 tiroirs est $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

1.4 Arrangements avec répétition

1.4.1 Introduction

On veut former un nombre n de 2 chiffres $n = ab$ choisis parmi $1, 2$ et 3. (éventuellement un élément peut apparaître plusieurs fois)

Toute possibilité est appelée arrangement avec répétition de 2 éléments parmi 3. Donc le nombre total de possibilités est 9.

Proposition 4. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*

Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n est : n^p.

1.4.2 Combinaisons

Introduction

On considère l'ensemble : $E = \{a, b, c, d\}$.

- La liste de toutes les parties de E formés de 2 éléments est : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, ces parties sont appelés combinaison à 2 éléments parmi 4. Leurs nombre est noté $C_4^2 = 6$.
- La liste de toutes les combinaisons à 3 éléments parmi 4 est : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ et $\{b, c, d\}$. Leurs nombre est : $C_4^3 = 4$.

Proposition 5. *Soient n et p deux entiers naturels.*

Le nombre de combinaison à p éléments choisis parmi n est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Exemple 6. Calculer : C_4^2 , C_5^3 , C_6^4 et C_2^1.

On a

- $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{4!}{2! \times (4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6.$
- $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{3!} = \dfrac{5!}{3! \times (5-3)!} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10.$
- $C_6^4 = \dfrac{A_6^4}{4!} = \dfrac{6!}{4! \times (6-4)!} = \dfrac{6!}{4! \times 2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 15.$
- $C_2^1 = \dfrac{A_2^1}{1!} = \dfrac{2!}{1! \times (2-1)!} = \dfrac{2 \times 1}{1 \times 1} = 2.$

Exemple 7. On prend simultanément 6 cartes d'un jeu de 32 cartes . On obtient une main de 6 cartes, sans répétition ni ordre . Il s'agit donc d'une combinaison de 6 éléments pris parmi 32 éléments.

Le nombre de mains possibles est : $C_{32}^6 = \dfrac{32!}{6! \times (32-6)!} = \dfrac{32!}{6! \times 26!} = 906192.$

1.5 Différents types de tirages

On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 jusqu'à 10. Pour tirer 3 boules de cette urne, il y a 3 types de tirages possibles :

- Tirage simultané : Lorsqu'on tire les 3 boules simultanément, toute possibilité est une combinaison de 3 éléments choisis parmi 10. Le nombre de tirages possible dans ce cas est : $C_{10}^3 = \dfrac{A_{10}^3}{3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$.
- Tirage successif avec remise : Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On dit qu'on a effectué un tirage successif avec remise. Chaque possibilité dans ce cas est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 10 et le nombre de tirages possibles est : $10^3 = 1000$.
- Tirage successif sans remise : Si l'on tire 3 boules l'une après l'autre sans remettre aucune boule tirée dans l'urne. On dit qu'on a effectué un tirage successif sans remise. Chaque possibilité dans ce cas est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 10 et le nombre de tirages possibles est : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$.
- Résumé des situations :

Type de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	*Dénomb−rement*
Successifs AVEC remise	*On tient compte de l'ordre*	*Un élément peut être tiré plusieurs fois*	n^p
Successifs SANS remise	*On tient compte de l'ordre*	*Un élément n'est tiré qu'une seule fois*	A_n^p
Simultanés	*L'ordre n'intervient pas*	*Un élément n'est tiré qu'une seule fois*	C_n^p

Remarque 4. Quand on utilise plusieurs combinaisons, faut-il additionner ou multiplier ? Cela dépend de la situation !

Concrètement :

1. Si les différentes étapes sont reliées par un "et", on multiplie
2. Si les différents cas sont reliés par un "ou", on additionne.

Exemple 8. Une urne contient 3 boules rouges, 4 noires et 1 blanche. On tire 3 boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer le nombre de tirages de trois boules de même couleur.
3. Calculer le nombre de tirages ne comprenant aucune boule rouge.

2 Probabilité sur un ensemble fini

2.1 Vocabulaire des probabilités

— **Expérience aléatoire** : Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles mais dont on ne peut pas prévoir le résultat qui se produira effectivement.

Exemple 9. :

1. Lancer un dé à 6 faces sur une piste de jeu.
2. Lancer une pièce de monnaie.
3. Poser une question à un lycéen choisi au hasard.

— **Univers** : Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note Ω. On a alors : $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Exemple 10. :

1. Il y a 6 issues possibles pour un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Il y a 2 issues possibles pour une pièce de monnaie : $\Omega = \{1, 2\}$.
3. Il y a 700 lycéens dans l'échantillon qui peuvent être interroger.

— **Evénement** : Sous ensemble de l'ensemble univers Ω. On le note avec une majuscule.

Exemple 11. :

1. A : « Obtenir un nombre pair avec un dé » c'est-à-dire $A = \{2, 4, 6\}$
2. B : « Obtenir face avec une pièce » c'est-à-dire $B = \{F\}$
3. C : « Obtenir un lycéen âgé de moins de 17 ans »

— **Evénement élémentaire** : événement qui ne contient qu'un seul élément. On le note alors e_i.

Exemple 12. :

1. e_6 : « Obtenir un six avec un dé »
2. e_i : « Interroger le lycéen i parmi 700 lycéen »

— **Evénement certain** : C'est l'univers Ω.
— **Evénement impossible** : C'est l'ensemble vide ϕ.

2.2 Opérations sur les événements

L'étude des probabilités fait appel à la logique mathématique : il s'agit d'analyser, dans un texte les éléments qui serviront aux calculs de probabilités. Les mots à repérer sont les conjonctions "et", "ou", et la négation "ne. . . pas" La logique mathématique fait aux opérations sur les ensembles. On définit les opérations élémentaires suivantes : le complémentaire, l'intersection et l'union. D'autres opérations peuvent se décomposer à l'aide de ces trois opérations de base.

2.2.1 Événement contraire

Définition 3. L'événement contraire d'un événement A est l'événement noté $\overline{A}$ composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in \Omega \quad et \; x \in A$$

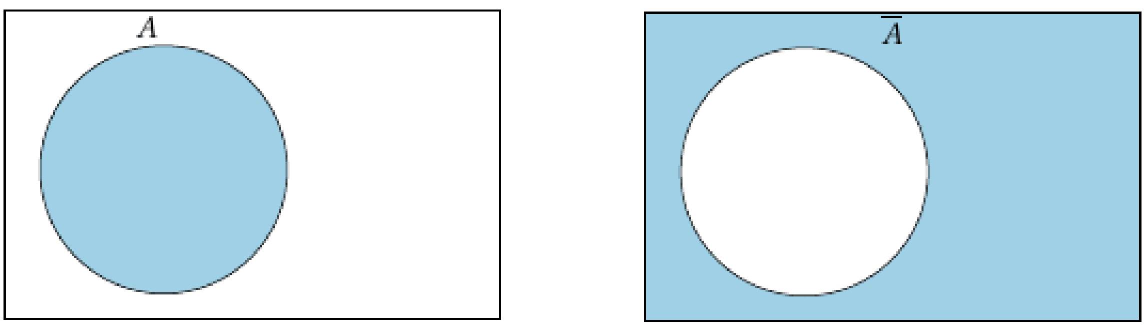

FIGURE 1 –

Exemple 13. Dans un lancer de dé, on considère l'événement A : « Obtenir 1 ou 2 » L'événement contraire est $\overline{A}$ « Obtenir 3,4,5 ou 6 »

2.2.2 Intersection de deux événements

Définition 4. L'intersection de deux événements A et B est l'événement noté $A \bigcap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B.

$$x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in A \quad et \quad x \in B$$

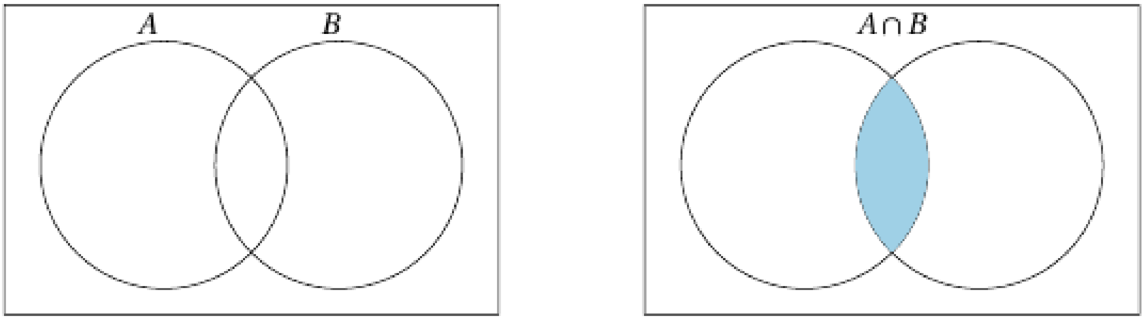

FIGURE 2 –

Exemple 14. Dans un lancer de dé, on appelle A l'événement « Obtenir 1,2 ou 3 » et B l'événement « Obtenir 3 ou 5 » . L'événement $A \bigcap B$ est « Obtenir 3 ».

2.2.3 Union de deux événements

Définition 5. L'union de deux événements A et B est l'événement noté $A \bigcup B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou (non exclusif) à B.

$$x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A \quad ou \quad x \in B$$

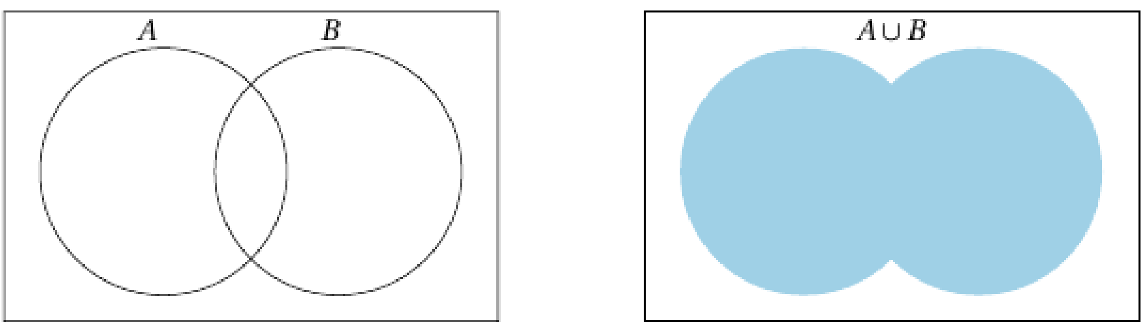

FIGURE 3 –

Remarque 5. Les éléments de $A \bigcup B$ peuvent appartenir à la fois à A et à B.

Exemple 15. Dans un lancer de dé, on appelle A l'événement « Obtenir 1,2 ou 3 » et B l'événement « Obtenir 3 ou 5 ». L'événement $A \bigcup B$ est « Obtenir $1, 2, 3$ ou 5 ».

2.2.4 Événements incompatibles

Définition 6. Les événements A et B sont dits disjoints ou incompatibles si l'événement $A \bigcap B$ est impossible.

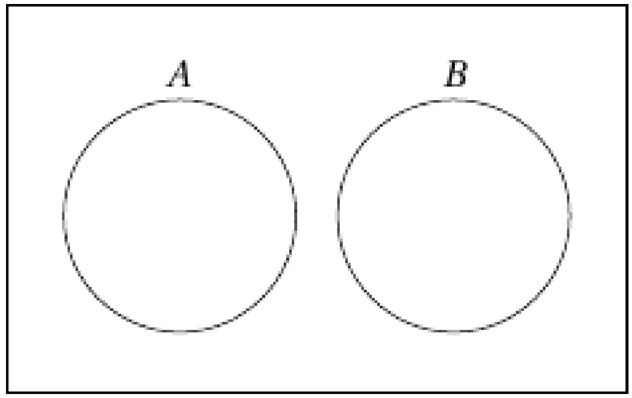

Figure 4 –

Exemple 16. Dans un lancer de dé, les événements « Obtenir 1 ou 2 » et « Obtenir 4 ou 5 » sont incompatibles.

2.2.5 Autres opérations

Les opérations peuvent se définir à l'aide du complémentaire, de l'intersection et de l'union de deux ensembles.

— **Différence** : $A - B$

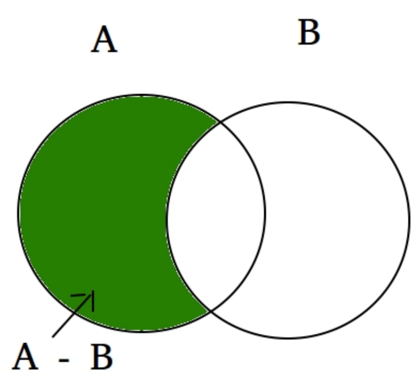

Figure 5 –

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \bigcap \overline{B}$$

— **Différence symétrique** : $A \triangle B$

$$A \triangle B = \left(A \bigcup B\right) \setminus \left(A \bigcap B\right)$$

2.2.6 Lois de Morgan

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B} \qquad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

2.3 Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 17. :

On considère un dé parfait dont les 6 faces sont numérotées : 1, 2,3,4,5 et 6.

Si on lance ce dé une seule fois, alors l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Et comme le dé est parfait, alors toutes les possibilités ont la même chance d'apparition (une chance parmi 6), on écrit :

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = \ldots = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Remarquez que : $\sum_{k=1}^{6} p(\{k\}) = 1$.

Exemple 18. :

On considère un dé dont une face est numérotée 1 deux faces chacune numérotées 2 et trois faces chacune numérotées 3.

Si on lance ce dé une seule fois, alors $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et dans ce cas, on a

$$p(\{1\}) = \frac{1}{6}, p(\{2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, p(\{3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

et $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) = 1$.

Définition 7. On considère une expérience aléatoire dont l'univers est : $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Si on lie chaque possibilité $\{a_k\}$ avec un nombre positif p_k tels que : $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, on dit qu'on a définie sur Ω une probabilité p et que (Ω, p) est un espace probabilisé fini. p_k est appelé probabilité de l'événement élémentaire $\{a_k\}$, on écrit $p(\{a_k\}) = p_k$.

Probabilité d'un événement :

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini.

- La probabilité d'un événement A notée $p(A)$, est égale à la somme des probabilités de tous les événements élémentaires qui constituent A.
- En particulier : $p(\phi) = 0$ et $p(\Omega) = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Exemple 19. Dans l'exemple 17, considérons l'événement : A"Obtenir un nombre impair" C'est-à-dire $A : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc

$$p(A) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Proposition 6. *Soit* (Ω, p) *un espace probabilisé fini.*

- *Si* A *est un événement quelconque, alors :* $0 \leq p(A) \leq 1$.
- *Si* A *et* B *sont deux événements quelconques, alors*

$$p\left(A\bigcup B\right) = p(A) + p(B) - p\left(A\bigcap B\right)$$

  - *En particulier :* $A\bigcap B = \phi \Rightarrow p(A\bigcup B) = p(A)+p(B)$ *et* $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$.

2.4 Probabilité uniforme

Définition 8. Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini tels que : $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ avec $n \geq 2$.

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité on dit qu'il s'agit d'une situation équiprobabilité . Cela veut dire que : $\boxed{(\forall k \in \{1, 2, ..., n\}), p(\{a_k\}) = \frac{1}{n}}$

Proposition 7. *En cas d'équiprobabilité, pour tout événement* A *on a* $\boxed{p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$.

C'est-à-dire : $\boxed{p(A) = \frac{nombre \ \ d'éléments \ \ de \ \ A}{nombres \ \ d'éléments \ \ de \ \ \Omega}}$

Exemple 20. Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 4 noires, 1 blanche. On tire simultanément 3 boules de cette urne.

On considère les événements suivants :

B : « tirer trois boules rouges »

N : « tirer trois boules de même couleur »

D : « obtenir trois boules de couleurs différentes »

M : « obtenir au plus une boule rouge »

E : « obtenir au moins deux boules noires »

F : « obtenir exactement une boule blanche »

1. Calculer $p(B)$, $p(N)$, $p(D)$, $p(M)$, $p(E)$ et $p(F)$.
2. Répondre à la question précédente lors d'un tirage de 3 boules successivement et sans remise.

Question	Tirage Simultanés	Successifs sans remise
1	$card\,(\Omega) = C_8^3 = 56$	$card\,(\Omega) = A_8^3 = 336$
2	$p\,(B) = \frac{card\,(B)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$	$p\,(B) = \frac{card\,(B)}{card\,(\Omega)} = \frac{A_3^3}{A_8^3} = \frac{6}{336}$
3	$p\,(N) = \frac{card\,(N)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_8^3} = \frac{5}{56}$	$p\,(N) = \frac{card\,(N)}{card\,(\Omega)} = \frac{A_3^3 + A_4^3}{A_8^3} = \frac{30}{336}$
4	$p\,(D) = \frac{card\,(D)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{12}{56}$	$p\,(D) = \frac{card\,(D)}{card\,(\Omega)} = \frac{\begin{matrix} A_1^1 \times & A_3^1 \times A_4^1 \times \\ C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 & \end{matrix}}{A_8^3} = \frac{72}{336}$
5	$p\,(M) = \frac{card\,(M)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_5^2 + C_5^3}{C_8^3} = \frac{40}{56}$	$p\,(M) = \frac{card\,(M)}{card\,(\Omega)} = \frac{\begin{matrix} A_1^1 \times & A_3^1 \times A_4^1 \times \\ C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 & \end{matrix}}{A_8^3} = \frac{240}{336}$
6	$p\,(E) = \frac{card\,(E)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_4^2 \times C_4^1 \times C_4^3}{C_8^3} = \frac{28}{56}$	$p\,(E) = \frac{card\,(E)}{card\,(\Omega)} = \frac{\begin{matrix} A_4^2 \times & A_4^1 \times \\ C_3^2 \times C_1^1 + A_4^3 & \end{matrix}}{A_8^3} = \frac{168}{336}$
7	$p\,(F) = \frac{card\,(F)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_1^1 \times C_7^2}{C_8^3} = \frac{21}{56}$	$p\,(F) = \frac{card\,(F)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^2 \times A_1^1 \times A_7^2}{A_8^3} = \frac{126}{336}$

3 Probabilité conditionnelle - événements indépendants

3.1 Probabilité conditionnelle

3.1.1 Introduction

Le tableau suivant est échantillon d'un établissement scolaire

	Pratiquent l'anglais	Ne pratiquent pas l'anglais
Garcons	150	50
Filles	160	40

On choisit dans cet échantillons un élève au hasard et on considère les événements :

A : « L'élève choisi est un garçon »

B : « L'élève choisi pratique l'anglais »

C : « L'élève choisi pratique l'anglais sachant que c'est un garçon »

1. Calculer $\dfrac{p\left(A \bigcap B\right)}{p\left(A\right)}$ et $p\left(C\right)$.
2. Que constatez vous ?

Définition 9. Soient A et B deux événements tels que : $p\left(A\right) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , le nombre noté $p_A\left(B\right)$ définie par : $\boxed{p_A\left(B\right) = \dfrac{p\left(A \bigcap B\right)}{p\left(A\right)}}$.

Exemple 21. Dans un lycée comptant 1200 élèves, il y a 660 filles et 540 gracons. Parmi les filles, on compte 110 externes. On choisit un élève au hasard parmi les élèves du lycée et on note :

— F : « l'élève choisi est une fille »

— E : « l'élève choisi est externe »

1. Calculer $p_F\left(E\right)$.

   On a $p\left(F\right) = \dfrac{660}{1200} = \dfrac{11}{20}$. Et $p\left(E \bigcap F\right) = \dfrac{110}{1200} = \dfrac{11}{120}$.
   Ainsi sachant que l'élève choisi est une fille, la probabilité qu'elle soit externe est :

$$\begin{aligned} p_F\left(E\right) &= \frac{p\left(E \bigcap F\right)}{p\left(F\right)} \\ &= \frac{\frac{11}{120}}{\frac{11}{20}} \\ &= \frac{20}{120} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exemple 22. Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir exactement deux boules rouges »

B : « Obtenir exactement une boule verte »

1. Montrer que : $p(A) = \dfrac{12}{55}$ et $p(B) = \dfrac{21}{44}$.
2. Calculer $p_B(A)$.

Les probabilités conditionnelles suivent les mêmes règles que les probabilités en général, c'est-à-dire :

Proposition 8. *On considère deux événements A, tel que $p(A) \neq 0$ et B*

1. $0 \leq p_A(B) \leq 1$
2. $p_A(A) = 1$
3. $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$.

Proposition 9. *(Formule des probabilités composées)*

On considère deux événements A et B de probabilités tous les deux non nulles.

$\boxed{p\left(A \bigcap B\right) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)}$

3.2 Événements indépendants

3.2.1 Introduction

Soient A et B deux événements tels que : $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,5$ et $p\left(A \bigcap B\right) = 0,65$.

Montrer que : $p\left(A \bigcap B\right) = p(A) \times p(B)$. (On dit que A et B sont indépendants).

Définition 10. On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si : $\boxed{p\left(A \bigcap B\right) = p(A) \times p(B)}$

Exemple 23. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

A : « la carte tirée est un as »

C : « la carte tirée est un cœur »

On a $p(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $p(C) = \dfrac{1}{4}$ donc $p(A) \times p(C) = \dfrac{1}{32}$. Il n'y a qu'un seul as de cœur donc $p\left(A \bigcap C\right) = \dfrac{1}{32}$.

Par suite $p\left(A \bigcap C\right) = p(A) \times p(C)$ et les événements A et C sont indépendants.

Proposition 10. *On considère deux événements A et B de probabilités non nulles.*

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p_B(A) = p(A)$$

Calculer une probabilité sur une répétition d'expériences

Exemple 24. On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1. Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

— Obtenir deux boules blanches.
— Obtenir une boule blanche et une boule rouge.
— Obtenir au moins une boule blanche.

1. On note B l'évènement « On tire une boule blanche » et R l'évènement « On tire une boule rouge ». Donc

$$p(B) = \frac{3}{5} = 0,6 \ , \ p(R) = \frac{2}{5} = 0,4$$

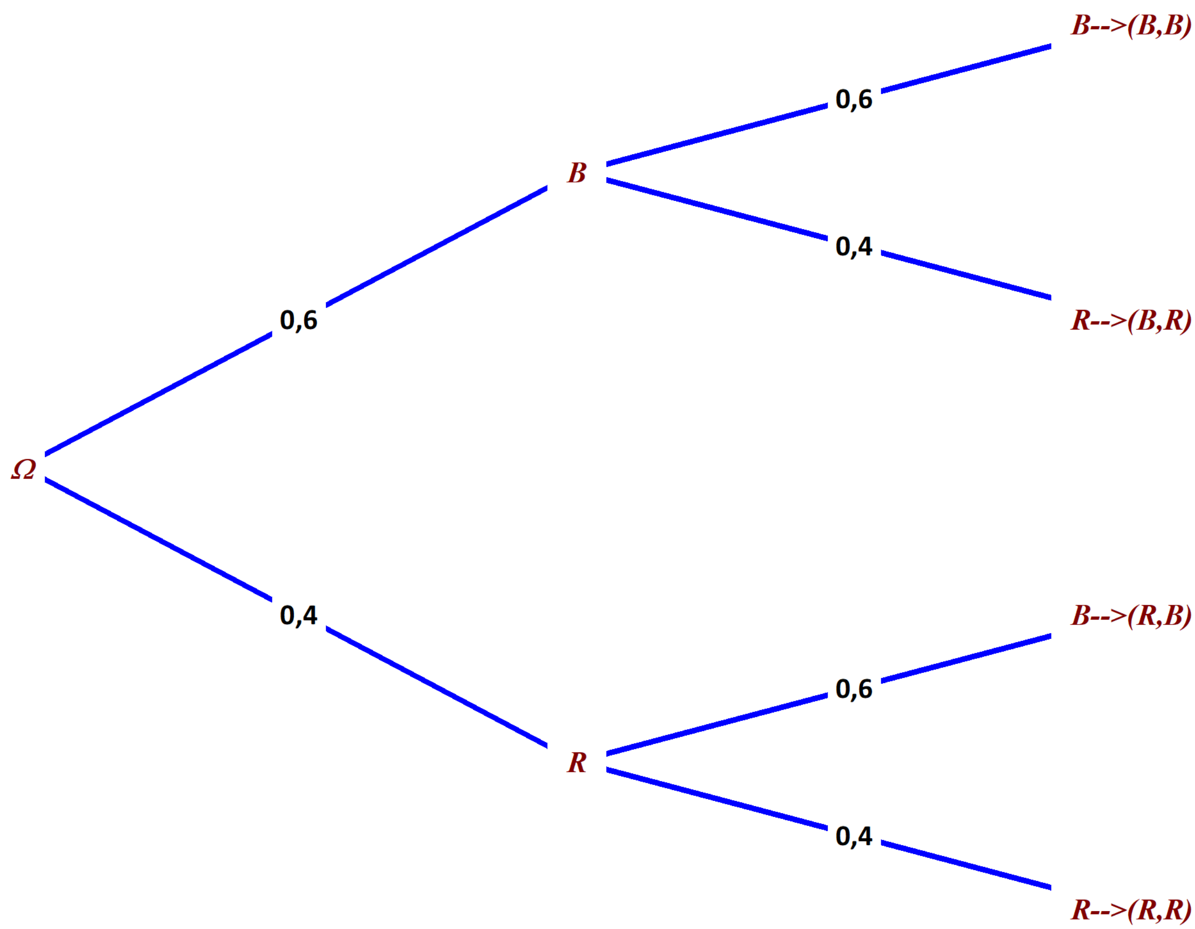

FIGURE 6 –

2. Déterminons les probabilités des événements suivants :

a. Obtenir deux boules blanches. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}$ donc d'après l'arbre, on a :

$$p\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} = 0,6 \times 0,6 = 0,36$$

b. Obtenir une boule blanche et une boule rouge. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} R \\ B \end{pmatrix}$ donc d'après l'arbre, on a :

$$p\begin{pmatrix} B & R \\ R & B \end{pmatrix}_{ou} = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48$$

c. Obtenir au moins une boule blanche. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} R \\ B \end{pmatrix}$ donc d'après l'arbre, on a :

$$p\begin{pmatrix} B & ou & B & ou & R \\ R & & B & & B \end{pmatrix} = 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 = 0,84$$

Proposition 11. *On considère deux événements indépendants A et B alors A et $\overline{B}$ sont également indépendants.*

4 Les variables aléatoires

4.1 Définition et exemples

Définition 11. On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

On appelle variable aléatoire toute fonction, souvent notée X, qui à chaque élément de Ω lui associe un nombre réel.

Exemple 25. Une urne contient 6 boules qui portent les numéros : 2,2,2,1,1,0 indiscernables au toucher. On tire de l'urne au hasard deux boules simultanément.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des numéros des boules tirées.

Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X.

Les valeurs possibles pour X sont :

- On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numéros 1 donc la somme 2.
- On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numéros 2 donc la somme 4.
- On peut par exemple tirer deux boules dont une porte le numéro 0 et une autre 1 donc la somme 1.
- On peut par exemple tirer une boule qui porte le numéro 1 et une autre qui porte le numéro 2 donc la somme 3.

On a ainsi définie une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$. Donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

4.2 Événements associés à une variable aléatoire

Définition 12. Soit X une variable aléatoire sur Ω et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. On note $\boxed{(X = a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}}$

Remarque que $(X = a)$ est un événement car $(X = a) \subset \Omega$.

4.3 Loi d'une variable aléatoire

Définition 13. Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle loi de X la donnée de la probabilité $p(X = a)$ pour tout $a \in X(\Omega)$.

Remarque 6. Pour déterminer une loi d'une variable aléatoire X :

1. On détermine l'ensemble des valeurs prises par X
2. On calcule $p(X = a)$ pour tout $a \in X(\Omega)$.

Remarque 7. Il faut penser à vérifier, une fois de loi de probabilité déterminée que :

$$p(X = x_1) + p(X = x_2) + ... + p(X = x_n) = 1.$$

Exemple 26. On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. (D'après l'exemple 25)

$(X = 1)$: « Tirer une boule qui porte le numéro 0 et une boule qui portent le numéro 1 »

Donc $p(X = 1) = \dfrac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \dfrac{2}{15}$.

$(X = 2)$: « Tirer une boule qui porte 2 et une boule qui porte le numéro 0 ou tirer deux boules qui portent 1 »

Donc $p(X = 2) = \dfrac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2} = \dfrac{4}{15}$.

$(X = 3)$: « Tirer une boule qui porte 1 et une boule porte le numéro 2 »

Donc $p(X = 3) = \dfrac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \dfrac{6}{15}$.

$(X = 4)$: « Tirer deux boules qui portent 2 »

Donc $p(X = 4) = \dfrac{C_3^2}{C_6^2} = \dfrac{3}{15}$.

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{6}{15}$	$\dfrac{3}{15}$

On remarque que : $p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = 1$.

4.4 Espérance, Variance et Écart-type

Dans toute cette partie On considérera une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

FIGURE 7 –

Définition 14. L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre

$$\boxed{E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n}$$

Exemple 27. On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-20	5	10	50
$p(X=x_i)$	0,6	0,2	0,15	0,05

FIGURE 8 –

L'espérance de la variable aléatoire X est alors :

$$\begin{aligned}E\left(X\right) &= -20\times p\left(X=-20\right)+5\times p\left(X=5\right)+10\times p\left(X=10\right)+50\times p\left(X=50\right)\\ &= -20\times 0,6+5\times 0,2+10\times 0,15+50\times 0,05\\ &= -7\end{aligned}$$

Remarque 8. On dit qu'une expérience est <u>équitable</u> si $E\left(X\right)=0$.

Proposition 12. :

On considère une variable aléatoire X sur un univers Ω ainsi que deux réels a et b. On a alors $\boxed{E\left(aX+b\right)=aE\left(X\right)+b}$.

Définition 15. La <u>variance</u> de la variable aléatoire X est le nombre

$$\boxed{V\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i-E\left(X\right)\right)^2 = p_1\left(x_1-E\left(X\right)\right)+p_2\left(x_2-E\left(X\right)\right)+...+p_n\left(x_n-E\left(X\right)\right.}$$

Exemple 28. En reprenant l'exemple précédent on a

$$\begin{aligned}V\left(X\right) &= 0,6\times\left(-20-\left(-7\right)\right)^2+0,2\times\left(5-\left(-7\right)\right)^2+0,15\times\left(10-\left(-7\right)\right)^2+0,05\times\left(50-\left(-7\right)\right)^2\\ &= 0,6\times\left(-13\right)^2+0,2\times 12^2+0,15\times 17^2+0,05\times 57^2\\ &= 336\end{aligned}$$

Proposition 13. :

On considère une variable aléatoire X sur un univers Ω ainsi que deux réels a et b. On a alors

$\boxed{V(aX+b) = a^2 V(X)}$

Définition 16. L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Exemple 29. Dans l'exemple précédent $\sigma(X) = \sqrt{336}$.

Remarque 9. Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs prises par la variable aléatoire X sont éloignées de $E(X)$.

5 Loi binomiale

Définition 17. Soit A un événement associé à une expérience aléatoire qui se réalise avec la probabilité p on répète cette expérience n fois de manière indépendante. La variable aléatoire X égale au nombre de fois avec A se réalise suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Proposition 14. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :* $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., n\}$

1. $\boxed{\forall k \in X(\Omega), p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$
2. $\boxed{E(X) = n \times p}$
3. $\boxed{V(X) = np(1-p)}$

Exemple 30. Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher portants les nombres :

0	0	0	0	0	1	1	1	1

On tire au hasard simultanément deux jetons du sac.

Soit A l'événement : « La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1 »

1. Montrer que : $p(A) = \dfrac{5}{9}$.
2. On considère le jeu suivant : *Saïd tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre* 1.
   (a) Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est $\dfrac{1}{6}$.
   (b) Saïd a joué le jeu précédent 3 fois (Saïd remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac). Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois.

FIN