Chapitre 09 : Variables aléatoires réelles

Première Spé

Yahya MATIOUI

23 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 Variable aléatoire et loi de probabilité

1.1 Variable aléatoire

Exemple 1.1. Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat.» L'ensemble de toutes les issues possibles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (l'univers des possibilités).

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
- Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou -1.

1. Pour les issues 5 et 6, on a : $X = 2$
2. Pour les issues 1,2,3 et 4, on a : $X = -1$.

Définition 1.1. On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. On appelle variable aléatoire toute fonction, souvent notée X, qui à chaque élément de Ω lui associe un nombre réel.

1.2 Loi de probabilité

Définition 1.2. Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$. La loi de probabilité de X est donnée par toutes les probabilités $p(X = x_i)$.

Remarque 1.1. :

1. Les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X.

2. Il faut penser à vérifier, une fois de loi de probabilité déterminée, que :

$$p(X = x_1) + p(X = x_2) + ... + p(X = x_n) = 1$$

Exemple 1.2. On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.

Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs. Etablir la loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 1,2,3,4,5 et 6.

1. La plus grande des deux valeurs est 1, si on obtient la combinaison : $(1,1)$ donc

$$p(X = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

2. La plus grande des deux valeurs est 2, si on obtient les combinaisons : $(1,2)$,$(2,1)$ ou $(2,2)$ donc

$$p(X = 2) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3. La plus grande des deux valeurs est 3, si on obtient les combinaisons : $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$ ou $(3,3)$ donc

$$p(X = 3) = \frac{5}{36}$$

4. La plus grande des deux valeurs est 4, si on obtient les combinaisons : $(1,4)$, $(4,1)$,$(2,4)$,$(4,2)$,$(3,4)$,$(4,3)$ ou $(4,4)$ donc

$$p(X = 4) = \frac{7}{36}$$

5. La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,5)$, $(5,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,5)$, $(5,4)$ ou $(5,5)$ donc

$$p(X = 5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

6. La plus grande des deux valeurs est 6, si on obtient les combinaisons : $(1,6)$, $(6,1)$, $(2,6)$, $(6,2)$, $(3,6)$, $(6,3)$, $(4,6)$, $(6,4)$, $(5,6)$, $(6,5)$ ou $(6,6)$ donc

$$p(X = 6) = \frac{11}{36}$$

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

FIGURE 1 –

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)+p(X=6)=1$$

2 Espérance, Variance et écart-type

Dans toute cette partie On considèrera une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

FIGURE 2 –

Définition 2.1. L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n}$$

Exemple 2.1. On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-20	5	10	50
$p(X=x_i)$	0,6	0,2	0,15	0,05

FIGURE 3 –

L'espérance de la variable aléatoire X est alors :

$$\begin{aligned}E(X)&=-20\times p(X=-20)+5\times p(X=5)+10\times p(X=10)+50\times p(X=50)\\&=-20\times 0,6+5\times 0,2+10\times 0,15+50\times 0,05\\&=-7\end{aligned}$$

Remarque 2.1. On dit qu'une expérience est <u>équitable</u> si $E(X) = 0$.

Proposition 2.1. *(non exigible)*

On considère une variable aléatoire X sur un univers Ω ainsi que deux réels a et b. On a alors $\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= (ax_1+b)\times p_1 + (ax_2+b)\times p_2 + ... + (ax_n+b)\times p_n \\ &= ax_1\times p_1 + bp_1 + ax_2\times p_2 + bp_2 + ... + ax_n\times p_n + b\times p_n \\ &= a\left(\underbrace{x_1\times p_1 + x_2\times p_2 + ... + x_n\times p_n}_{=E(X)}\right) + b\left(\underbrace{p_1+p_2+...+p_n}_{=1}\right) \\ &= aE(X) + b\times 1 \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

donc $E(aX+b) = aE(X)+b$.

□

Définition 2.2. La <u>vaiance</u> de la variable aléatoire X est le nombre

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1\left(x_1 - E(X)\right) + p_2\left(x_2 - E(X)\right) + ... + p_n\left(x_n - E(X)\right.}$$

Exemple 2.2. En reprenant l'exemple précédent on a

$$\begin{aligned} V(X) &= 0,6\times(-20-(-7))^2 + 0,2\times(5-(-7))^2 + 0,15\times(10-(-7))^2 + 0,05\times(50-(-7))^2 \\ &= 0,6\times(-13)^2 + 0,2\times 12^2 + 0,15\times 17^2 + 0,05\times 57^2 \\ &= 336 \end{aligned}$$

Proposition 2.2. *(non exigible)*

On considère une variable aléatoire X sur un univers Ω ainsi que deux réels a et b. On a alors

$$\boxed{V(aX+b) = a^2V(X)}$$

Démonstration. Admis

□

Définition 2.3. <u>L'écart-type</u> de la variable aléatoire X est le nombre $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Exemple 2.3. Dans l'exemple précédent $\sigma(X) = \sqrt{336}$.

Remarque 2.2. Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs prises par la variable aléatoire X sont éloignées de $E(X)$.

Exemple 2.4. Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée. L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre. La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$p(X=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

FIGURE 4 –

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire : $Y = 1000X - 1300$.
La loi de probabilité de Y est alors :

x_i	–2	–1	0	1	2
$p(Y=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

FIGURE 5 –

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= -2 \times 0,2 + (-1) \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,1 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= 0,2 \times (-2-0,1)^2 + 0,1 \times (-1-0,1)^2 + 0,2 \times (0-0,1)^2 + 0,4 \times (1-0,1)^2 + 0,1 \times (2-0,1)^2 \\ &= 1,69 \end{aligned}$$

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :

$$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000E(X) - 1300$$

donc $E(X) = \dfrac{E(Y) + 1300}{1000} = 1,3001.$

On a $V(Y) = V(1000X - 1300) = 1000^2 V(X)$, donc $V(X) = \dfrac{V(Y)}{1000^2} = \dfrac{1,69}{1000^2}$

donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{1,69}{1000^2}} = 0,0013.$

On conclut que $E(X) = 1,3001cm$ et $\sigma(X) = 0,0013cm.$

FIN