Chapitre 02 : Suites Numériques

Première Spé

Yahya MATIOUI

10 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 Généralité sur les suites numériques

1.1 Définition et Notation

Définition 1.1. Une suite numérique u est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ ou une de ses parties. à la variable entière n, on associe le nombre $u(n)$ appelé terme de rang n de la suite u. On a donc $u : n \mapsto u(n)$. On note souvent u_n le terme de rang n ou le terme général de la suite u.

Notation :
- Lorsque la suite u est définie sur $\mathbb{N}$, u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n).
- Lorsque la suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$, u se note $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exemple 1.1. :

- On a
$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto 2n+1 \end{aligned}$$
se note par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = 2n+1$ et son premier terme est $u_0 = 1$.
- On a
$$\begin{aligned} v : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto 1+\frac{2}{n} \end{aligned}$$
se note par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$avec $v_n = 1+\dfrac{2}{n}$ et son premier terme est $v_1 = 3$.

— On a

$$w : \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto \frac{n+2}{n(n-1)}$$

se note par $(w_n)_{n\geq 2}$ avec $w_n = \dfrac{n+2}{n(n-1)}$ et son premier terme est $w_2 = 2$.

1.2 Définir une suite

1.2.1 De façon explicite

Définition 1.2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = f(n)$ avec f est une fonction numérique.

Exemple 1.2. :

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 2n+5$. On a donc $\begin{cases} u_0 = 2\times 0 + 5 = 5 \\ u_1 = 2\times 1 + 5 = 7 \\ u_2 = 2\times 2 + 5 = 9 \end{cases}$

— Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), v_n = \dfrac{2}{n}$. On a donc $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_2 = 1 \end{cases}$.

1.2.2 Par récurrence

Définition 1.3. Lorsque le terme général u_n dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et par un ou plusieurs premier(s) terme(s).

La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent $\begin{cases} u_0 \\ \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

La suite est dite récurrente à deux termes si u_n dépend des deux termes qui le précèdent $\begin{cases} u_0, u_1 \\ \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$.

Exemple 1.3. :

On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4.

— $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$
— $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$
— $u_3 = 3u_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 28$
— $u_4 = 3u_3 - 2 = 3 \times 28 - 2 = 82$

Exemple 1.4. :
On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
Déterminer v_2, v_3 et v_4.

— $v_2 = v_1 + v_0 = 2 + 1 = 3$
— $v_3 = v_2 + v_1 = 3 + 1 = 4$
— $v_4 = v_3 + v_2 = 4 + 3 = 7$

1.3 Monotonie d'une suite

Définition 1.4. .
Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique ($I \subset \mathbb{N}$).

— La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\forall (n,p) \in I^2, n > p \Rightarrow u_n \geq u_p$
— La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si : $\forall (n,p) \in I^2, n > p \Rightarrow u_n \leq u_p$
— La suite $(u_n)_{n\in I}$ est constante si : $\forall (n,p) \in I^2, u_n = u_p$.

Proposition 1.1. .
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite numérique

— *Si $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
— *Si $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
— *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit croissante, soit décroissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est dite monotone.*

Remarque 1.1. .

— Lorsqu'on a $u_{n+1} - u_n > 0$, on dit que (u_n) est <u>strictement</u> croissante.
— Lorsqu'on a $u_{n+1} - u_n < 0$, on dit que (u_n) est <u>strictement</u> décroissante.
— (u_n) est dite positive (respectivement négative) si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$(respectivement $u_n \leq 0$).
— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = u_n$.

Exemple 1.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{5n-3}{2n+7}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7} - \frac{5n-3}{2n+7} \\
&= \frac{5n+5-3}{2n+2+7} - \frac{5n-3}{2n+7} \\
&= \frac{5n+2}{2n+9} - \frac{5n-3}{2n+7} \\
&= \frac{(5n+2)(2n+7)-(5n-3)(2n+9)}{(2n+9)(2n+7)} \\
&= \frac{10n^2+35n+4n+14-\left(10n^2+45n-6n-27\right)}{(2n+9)(2n+7)} \\
&= \frac{10n^2+39n+14-\left(10n^2+39n-27\right)}{(2n+9)(2n+7)} \\
&= \frac{10n^2+39n+14-10n^2-39n+27}{(2n+9)(2n+7)} \\
&= \frac{41}{(2n+9)(2n+7)}
\end{aligned}$$

et comme $\dfrac{41}{(2n+9)(2n+7)} > 0$ donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n > 0$$

c'est-à-dire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est strictement croissante.

Remarque 1.2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est strictement positive, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (respectivement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$).

Exemple 1.6. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

Tous les termes de la suite sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}$,on a

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} \\
&= \frac{2^{3n}\times 2}{3^{2n}\times 3} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$. Par suite la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$est strictement décroissante.

Proposition 1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie de manière explicite sous la forme $u_n = f(n)$, avec f une fonction définie sur $[0, +\infty[$.*

1. *Si la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
2. *Si la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Démonstration. Pour tout entier naturel n, $n < n+1$. Or f est croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $f(n) < f(n+1)$, soit $u_n < u_{n+1}$ par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. (Même démo pour f décroissante).

□

2 Suite arithmétique

2.1 Définition

Définition 2.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite numérique.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$, le nombre r s'appelle alors la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

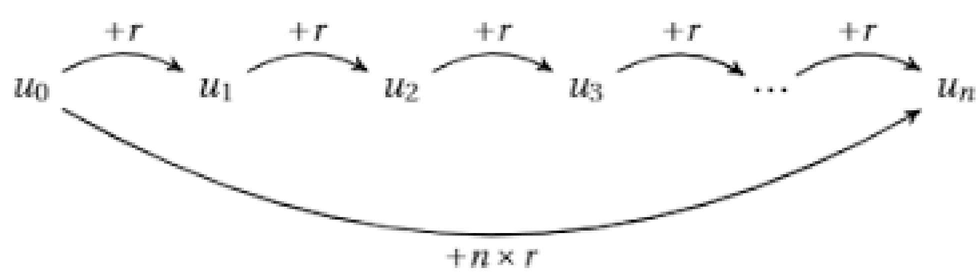

FIGURE 2.1 –

Autrement dit : Une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre r.

2.2 Comment reconnaître une suite arithmétique ?

Proposition 2.1. *Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a alors :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = r$$

Exemple 2.1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2n+3$ est arithmétique.

On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n = 2(n+1)+3-(2n+3) = 2n+2+3-2n-3 = 2$, donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1}-u_n = 2$. Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

2.3 Expression du terme général en fonction de n

Proposition 2.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r*

— $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = u_0 + nr$
— $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p + (n-p)r$

Démonstration. Admis □

Exemple 2.2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On donne $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0.

— On exprime u_{40} en fonction de u_{17}, on a alors :

$$u_{40} = u_{17} + (40-17)r \Leftrightarrow 70 = 24 + 23r \Leftrightarrow 70 - 24 = 23r \Leftrightarrow r = \frac{46}{23} = 2$$

— On peut alors trouver u_0 :

$$u_{17} = u_0 + 17 \times 2 \Leftrightarrow 24 = u_0 + 34 \Leftrightarrow u_0 = 24 - 34 = -10$$

Exemple 2.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$. Donner u_n en fonction de n.

On a $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = u_0 + nr$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 + 5n$.

2.4 Sens de variation d'une suite arithmétique

Proposition 2.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.*

— *Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
— *Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est strictement décroissante.*
— *Si $r = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est arithmétique de raison r, alors $u_{n+1} = u_n + r$ donc $r = u_{n+1} - u_n$. Or on a vu que le signe de $u_{n+1} - u_n$ donnait les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ou le résultat.

□

2.5 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

2.5.1 Somme des entiers de 1 à n

Proposition 2.4. *Pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. .

Soit $S_n = 1 + 2 + ... + n$. On a : $S_n = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$ que l'on peut écrire en inversant l'ordre des termes :

$$S_n = n + (n-1) + ... + 2 + 1$$

Par somme de ces deux égalités terme à terme, on obtient :

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1)$$

et comme $\underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)}_{ntermes} = n(n+1)$ donc $2S_n = n(n+1)$ par suite

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Exemple 2.4. Calculer la somme suivant : $S = 1 + 2 + ... + 99 + 100$.

On a

$$S = 1 + 2 + .. + 99 + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

2.5.2 Somme des $n+1$ premiers termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Déterminons la somme des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) de la suite.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + ... + (u_0 + nr) \\ &= u_0 + u_0 + ... + u_0 + r\,(1 + 2 + 3 + ... + n) \\ &= u_0\,(n+1) + r \times \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left(u_0 + \frac{nr}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{2u_0 + nr}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_0 + nr}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

donc $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$.

2.5.3 Somme des $n-p+1$ premiers termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p. De façon identique

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n = (n-p+1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$$

On retiendra : $S_n =$Nombre de termes$\times$(Somme des termes extrêmes / 2)

2.5.4 Conclusion

Proposition 2.5. *Sur la somme des termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on retiendra les résultats suivants :*

1. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$
2. $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$ ou plus généralement
3. $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$.

Exemple 2.5. .

Calculer les sommes suivantes : $S_1 = 1+3+5+...+99$, $S_2 = 1+3+5+...+(2n-1)$.

- Il s'agit de la des nombres impairs inférieurs à 100. Il y a 50 nombres impairs inférieurs à 100 donc
$$S_1 = 1+3+5+...+99 = 50 \times \left(\frac{1+99}{2}\right) = 50^2 = 2500$$
- Généralisons ce résultat. Il y a n nombres impairs inférieurs à $2n$. Le premier terme est 1 et le dernier $(2n-1)$ donc
$$S_2 = 1+3+5+...+(2n-1) = n \times \left(\frac{1+2n-1}{2}\right) = n \times n = n^2$$

3 Suite géométrique

3.1 Définition

Définition 3.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$, le nombre q s'appelle alors la raison de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

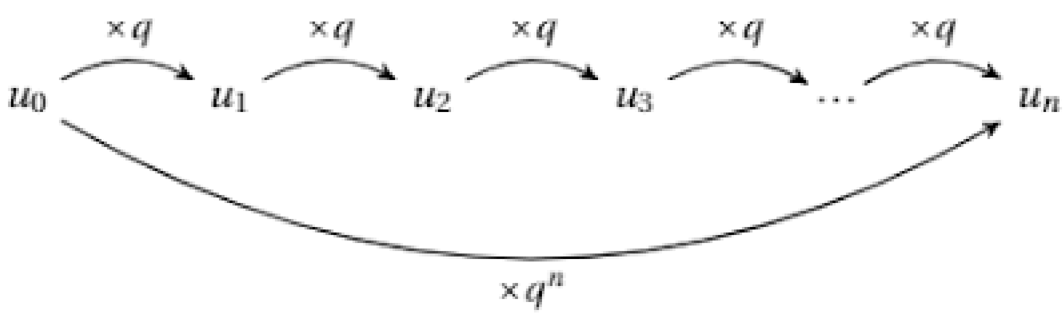

Figure 3.1 –

Autrement dit : Une suite est géométrique si et seulement si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un nombre réel q, toujours le même.

3.2 Comment reconnaître une suite géométrique ?

Proposition 3.1. *Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, on exprime, pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de u_n en montrant qu'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est alors géométrique de raison ce réel.*

Exemple 3.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$la suite définie par : $u_n = 3 \times 2^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est géométrique préciser sa raison et son premier terme.

Soit $n \in \mathbb{N}$,on a $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2 = 2 \times 3 \times 2^n = 2 \times u_n$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 2 \times u_n$. Par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est géométrique de raison 2, son premier terme est $u_0 = 3$.

3.3 Expression du terme général en fonction de n

Proposition 3.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q $(q \neq 0)$*

1. $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = u_0 \times q^n$
2. $\forall (n, p) \in\mathbb{N}^2$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration. Admis

□

Exemple 3.2. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q. On donne : $\begin{cases} u_7 = 4374 \\ \\ u_5 = 486 \end{cases}$.

Trouver la raison q et le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

— On exprime u_7 en fonction de u_5, on a alors :

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5} \Leftrightarrow 4374 = 486 \times q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{4374}{486} \Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ ou \\ q = -3 \end{cases}$$

on obtient $q = 3$ ou $q = -3$ et comme la raison est positive, donc $q = 3$.

— On peut alors trouver u_0 :

$$u_5 = u_0 \times q^5 \Leftrightarrow u_0 = \frac{u_5}{q^5} \Leftrightarrow u_0 = \frac{486}{243} = 2$$

— Calculons u_{10} :

$$\begin{aligned} u_{10} &= q^{10-7} \times u_7 \\ &= q^3 \times u_7 \\ &= 3^3 \times 4374 \\ &= 27 \times 4374 \\ &= 118098 \end{aligned}$$

3.4 Somme des premiers termes d'une suite géométrique

3.4.1 Somme des puissances successives d'un réel

Proposition 3.3. *Soit q un réel différent de 1. Alors pour tout entier naturel n, on a :*

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration. .
Soit $S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$, alors

$$q \times S = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1}$$

donc par différence de ces deux égalités, on obtient : $S - q \times S = 1 - q^{n+1}$ par suite $(1 - q) S = 1 - q^{n+1}$ donc

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Remarque 3.1. Si $q = 1$ alors $1 + 1 + 1^2 + ... + 1^n = (n + 1) \times 1 = n + 1$.

Exemple 3.3. Calculer pour tout entier naturel n la somme

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,on a

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n \\ &= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = 2^{n+1} - 1$.

3.4.2 Somme des $n + 1$ premiers termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Déterminons la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= u_0 + (q \times u_0) + \left(q^2 \times u_0\right) + ... + (q^n \times u_0) \\ &= u_0 \left(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n\right) \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

donc $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

3.4.3 Somme des $n - p + 1$ premiers termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p. De u_p à u_n, il y a $(n - p + 1)$ termes, on a alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

3.4.4 Conclusion

Proposition 3.4. *Sur la somme des termes d'une suite géométrique, on peut retenir les résultats suivants* :

1. $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
2. $u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ou plus généralement
3. $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

Exemple 3.4. Calculer les sommes suivantes :

$S = 1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{10}$ et $S_n = \dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{3^2} + ... + \dfrac{5}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

— Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ de premier terme $u_0 = 1$ donc

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{10} \\ &= \frac{1 - 2^{10+1}}{1 - 2} \\ &= 2^{11} - 1 \\ &= 2047 \end{aligned}$$

— Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique (v_n) de raison $q = \frac{1}{3}$ de premier terme $v_1 = \frac{5}{3}$ donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{5}{3} + \frac{5}{3^2} + ... + \frac{5}{3^n} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,, S_n = \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

4 Limite d'une suite

Exemple 4.1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on donne $u_n = \frac{2n+1}{n}$.

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite de plus en plus grands :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	$2,5$	$2,333$	$2,25$	$2,2$	$2,1$	$2,067$	$2,02$	$2,002$

plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapproche de 2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. On lit : la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 2.

Définition 4.1. .

— Une suite convergente possède des termes qui se rapprochent d'une valeur, appelée limite, lorsque n devient de plus en plus grand.

— Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Exemple 4.2. Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$, $\omega_n = \frac{1}{n^3}$ et $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0.

Convergence d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q. Comme l'expression du terme général est de la forme : $u_n = u_0 \times q^n$, la convergence de la suite ne dépend que de la convergence de q^n. On admettra le théorème suivant :

Proposition 4.1. *Soit q un réel. On a les limites suivantes* :

- *Si* $-1 < q < 1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- *Si* $q = 1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- *Si* $q > 1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- *Si* $q \leq -1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ *n'existe pas.*

FIN