Chapitre 01 : SECOND DEGRÉ

Première spé

Yahya MATIOUI

2 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 La forme canonique du trinôme

1.1 Le trinôme du second degré

Définition 1. On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque 1. Une fonction polynôme du second degré s'appelle également « trinôme du second degré »

Exemple 1. Les fonctions suivantes : $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$ et $h(x) = 4 - 2x^2$ des fonctions polynômes du second degré.

1.2 Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Proposition 1. *La forme canonique d'un trinôme est de la forme :*

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Démonstration. On considère le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+2\times\frac{b}{2a}\times x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x^2+2\times\frac{b}{2a}\times x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

par suite $f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.

□

Remarque 2. Dans un cas concret, on n'utilise pas cette formule un peu difficile à mémoriser, mais on retient l'astuce qui consiste à ajouter puis soustraire un terme comme nous l'avons vu dans les exemples précédents.

Exemple 2. Écrire sous la forme canonique :

$$f(x)=x^2-4x+5, g(x)=x^2+8x+1, h(x)=x^2-6x-7$$

— On a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 5 \\ &= x^2 - 2 \times 2x + 2^2 - 2^2 + 5 \\ &= \left(x^2 - 2 \times 2x + 2^2\right) - 2^2 + 5 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 5 \\ &= (x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

donc $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

— On a

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 8x + 1 \\ &= x^2 + 2 \times 4x + 1 \\ &= x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2 + 1 \\ &= \left(x^2 + 2 \times 4x + 4^2\right) - 16 + 1 \\ &= (x+4)^2 - 15 \end{aligned}$$

donc $g(x) = (x+4)^2 - 15$.

— On a

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 - 6x + 7 \\ &= x^2 - 2 \times 3x + 3^2 - 3^2 + 7 \\ &= \left(x^2 - 2 \times 3x + 3^2\right) - 9 + 7 \\ &= (x-3)^2 - 2 \end{aligned}$$

donc $h(x) = (x-3)^2 - 2$.

2 Résolution d'une équation du second degré

2.1 Définition

Définition 2. Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2+bx+c = 0$ avec a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple 3. L'équation $4x^2 - 5x + 7 = 0$ est une équation du second degré.

Définition 3. On appelle discriminant du trinôme ax^2+bx+c, le nombre $\Delta = b^2-4ac$.

Proposition 2. *Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.*

-Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2+bx+c = 0$ n'a pas de solution réelle.

-Si $\Delta = 0$ *l'équation* $ax^2+bx+c=0$ *a une unique solution* $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

-Si $\Delta > 0$ *l'équation* $ax^2+bx+c=0$ *a deux solutions distinctes :* $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration. On considère l'équation du second degré (E) : $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$. On sait d'après la forme canonique que :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

et comme $\Delta = b^2-4ac$ et $4a^2 = (2a)^2$donc

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2} \end{aligned}$$

On distingue trois cas :

□

— Si $\Delta < 0$ alors $\dfrac{\Delta}{(2a)^2} < 0$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ donc l'équation (E) n'admet pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

— Si $\Delta = 0$ alors l'équation devient $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ et admet une unique solution $\dfrac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$ alors

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \\ ou \\ x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \\ ou \\ x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ ou \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ceci signifie que l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(E_1) :$3x^2+x+2=0$, (E_2) : $x^2-10x+25=0$, (E_3) : $x^2-3x+2=0$.

Solution 1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations :

— Calculons le discriminant de l'équation (E_1) : $3x^2+x+2=0$. On a $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$ alors $\Delta=b^2-4ac=1-4\times 3\times 2=-23<0$. donc l'équation ne possède pas de solution réelle, par suite $S=\phi$.

— Calculons le discriminant de l'équation (E_2) : $x^2-10x+25=0$. On a

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 25 \end{cases}$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$. donc l'équation possède une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{10}{2} = 5$, par suite $S = \{5\}$.

— Calculons le discriminant de l'équation $(E_3) : x^2-3x+2 = 0$. On a $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$. donc l'équation possède deux solutions réelle distinctes $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \\ \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{1}}{2} = 2 \end{cases}$ donc $S = \{1, 2\}$.

Remarque 3. .

— A chaque fois que $b = 0$ ou $c = 0$, il est inutile d'utiliser le discriminant Δ et les formules associées.

— Lorsqu'on peut factoriser le trinôme, on ne calcule pas le discriminant, on factorise puis on annule chaque facteur.

Exemple 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$(E_1) : 4x^2 - 25 = 0$, $(E_2) : 9x^2 - 6x + 1 = 0$

Solution 2. .

— Soit $x \in \mathbb{R}$,on a

$$\begin{aligned}4x^2 - 25 = 0 &\Leftrightarrow (2x)^2 - 5^2 = 0\\
&\Leftrightarrow (2x-5)(2x+5) = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x - 5 = 0\\ ou\\ 2x + 5 = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x = 5\\ ou\\ 2x = -5\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{5}{2}\\ ou\\ x = \dfrac{-5}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

donc $S = \left\{\dfrac{-5}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$.

— Soit $x \in \mathbb{R}$,on a

$$\begin{aligned}9x^2 - 6x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow (3x-1)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow 3x - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 3x = 1\\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

donc $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Définition 4. Pour une fonction polynôme f du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'appelle les racines de f.

2.2 Somme et produit des solutions d'équation du second degré

Proposition 3. *Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ de discriminant $\Delta \geq 0$. Alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes ou confondues x_1 et x_2* $\left(x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

-La somme des solutions : $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

-Produit des solutions : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration. On considère l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ de discriminant $\Delta \geq 0$. Alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (on peut avoir $x_1 = x_2$). Donc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_1 \times x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

donc $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

□

Remarque 4. Parfois, certaines équations admettent des solutions très simples que l'on appellent « racines évidentes ». Lorsque l'on connaît une telle solution, le produit des racines permet alors de trouver la seconde.

Exemple 6. Résolvons l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

— $x_1 = 1$ est racine évidente car $2 \times (1)^2 - 5 \times 1 + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$.
— On a $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$ alors $x_2 = \dfrac{3}{2}$. donc

$$S = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}.$$

3 Factorisation et signe d'un trinôme

3.1 Factorisation du trinôme

Proposition 4. *Lorsque le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet :*
-deux racines x_1 et x_2, alors : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
-admet une racine x_0, alors : $P(x) = a(x - x_0)^2$
-n'admet pas de racine, il ne peut pas se factoriser.

Démonstration. On considère le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$,avec $a \neq 0$. On sait que la forme canonique, du trinôme $ax^2 + bx + c$ est : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

–Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

– Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle. On ne peut donc pas factoriser $ax^2 + bx + c$ dans $\mathbb{R}$.

–Si $\Delta > 0$, alors

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right) \end{aligned}$$

avec $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$.

□

Exemple 7. Factoriser dans $\mathbb{R}$ les trinôme suivants : $P(x) = 6x^2 - x - 1$ et $Q(x) = x^2 + 3x + 4$.

— On a $\begin{cases} a = 6 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$ alors $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 25 > 0$ donc le trinôme $P(x)$ admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{25}}{12} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{25}}{12} = \dfrac{-1}{3}$ par suite $P(x) = 6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$.

— On a $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$ alors $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$ donc le trinôme $Q(x)$ n'admet aucune racine réelle, par suite le trinôme ne peut pas être factorisé dans $\mathbb{R}$.

3.2 Signe d'un trinôme

Proposition 5. *Soient a, b et c trois réels, a étant non nul. Soit le trinôme ax^2+bx+c, et Δ son discriminant.*

- *Si $\Delta < 0$, le trinôme garde un signe constant, le signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *Si $\Delta = 0$, le trinôme garde un signe constant, le signe de a pour tout $x \neq \dfrac{-b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a, à l'extérieur des racines et du signe contraire entre les racines*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax2+bx+c$		$signe(a)$	0	$signe(-a)$	0	$signe(a)$	

FIGURE 1 –

Démonstration. Soient a, b et c trois réels, a étant non nul. Soit le trinôme ax^2+bx+c et Δ son discriminant.

Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$ donc le trinôme ax^2+bx+c s'écrit comme suit $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{(-\Delta)}{4a^2}\right]$. Le premier terme entre crochets est un carré, donc toujours positifs ou nul ; le deuxième est strictement positif, puisque la somme entre crochets est strictement positive. Par conséquent ax^2+bx+c ne s'annule pas et garde un signe constant, le signe de a, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$, alors le trinôme comme suit $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Le trinôme admet une racine double $\dfrac{-b}{2a}$. Et comme un carré est toujours positif ou nul ax^2+bx+c est toujours du signe de a pour tout $x \neq \dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, alors le trinôme s'écrit comme suit $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1$et x_2 sont les deux racines réelles distinctes du trinôme. Supposons que $x_1 < x_2$, faisons un tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	$signe(a)$		$signe(a)$		$signe(a)$
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	$signe(a)$	0	$signe(-a)$	0	$signe(a)$

FIGURE 2 –

□

Exemple 8. Étudier le signe des trinômes suivants : $P(x) = 6x^2 - x - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Solution 3. .

— On a $\begin{cases} a = 6 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$ alors $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 25 > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 6} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 6} = \dfrac{-1}{3}$, et comme $a = 6 > 0$ on déduit le tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

FIGURE 3 –

donc $\begin{cases} P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \dfrac{-1}{3}] \cup [\dfrac{1}{2}, +\infty[\\ \\ P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{2}\right] \end{cases}$.

— On a $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$ alors $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Donc le trinôme n'admet donc aucune racine, et comme $a = 1 > 0$ alors le trinôme est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	

FIGURE 4 –

3.2.1 Application

Exemple 9. Résoudre les inéquations : $(I_1) : x^2 - 2x - 15 < 0$, $(I_2) : x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

— Le discriminant de $x^2 - 2x - 15$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$ et ses racines sont : $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{64}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{64}}{2 \times 1} = 5$, et comme $a = 1 > 0$ on déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x2-2x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 5 –

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est $S =]-3, 5[$.

— On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier le signe d'un trinôme :

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 5 < -x + 2 &\Leftrightarrow x^2 + 3x + x - 5 - 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x - 7 < 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = (4)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44 > 0$ et ses racines sont $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$, et comme $a = 1 > 0$ on déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$x2+4x-7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 6 –

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est $S = \left]-2 - \sqrt{11}, -2 + \sqrt{11}\right[$.

4 Variations, extremum et représentation graphique

Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

4.1 Variations

Proposition 6. .

— *Si* $a > 0$ *alors la fonction* f *est strictement croissante sur* $[\dfrac{-b}{2a}, +\infty[$ *et strictement décroissante sur* $]-\infty, \dfrac{-b}{2a}]$.

— *Si* $a < 0$ *alors la fonction* f *est strictement décroissante sur* $[\dfrac{-b}{2a}, +\infty[$ *et strictement croissante sur* $]-\infty, \dfrac{-b}{2a}]$.

Corollaire 1. .

— Si $a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$	

Figure 7 –

— Si $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$	

Figure 8 –

4.2 Extremum

La forme canonique de la fonction f est donc :

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

On pose alors : $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-b}{2a} \\ \\ \beta = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a} \end{cases}$ donc $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Proposition 7. :

Soit f une fonction du second degré définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.

— *Si $a > 0$, f admet un minimum pour $\alpha = a$. Ce minimum est égal à β.*
— *Si $a < 0$, f admet un maximum pour $\alpha = a$. Ce maximum est égal à β.*

Définition 5. :

La représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré s'appelle une parabole . Le point de coordonnées $S(\alpha, \beta)$ s'appelle le sommet de la parabole il correspond à l'extremum de la fonction f.

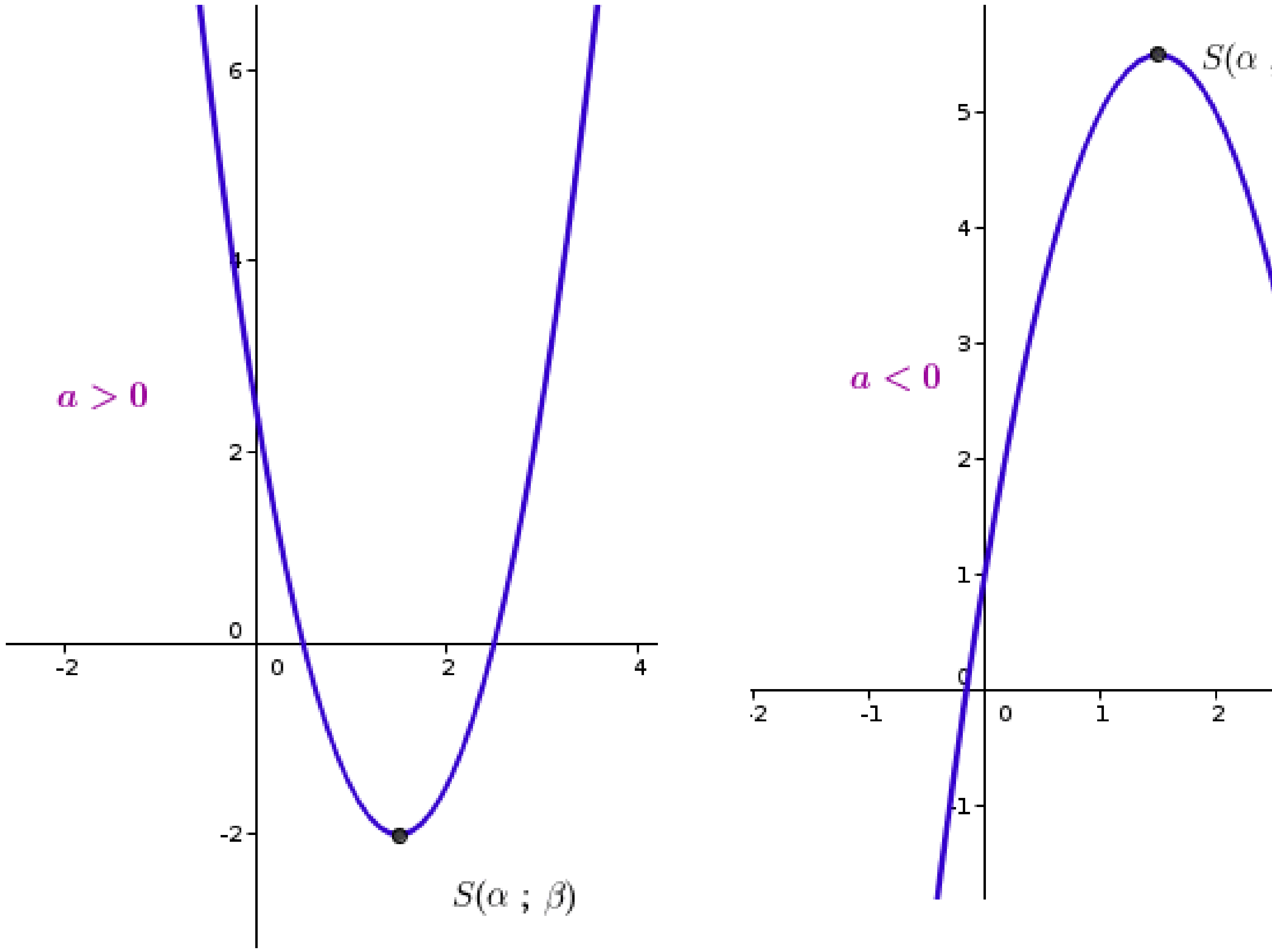

FIGURE 9 –

Proposition 8. *La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.*

Exemple 10. Soit la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$. Déterminer le sommet de la parabole de f et son axe de symétrie.

Solution 4. .

— Les coordonnées du sommet de la parabole sont (α, β) avec $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ \beta = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) \\ = f(3) = -17 \end{cases}$. Donc le point de coordonnées $(3, -17)$ est donc le sommet de la parabole. (comme $a = 2 > 0$ ce sommet correspond à un minimum).

— La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = \dfrac{-b}{2a} = 3$. La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole.

Exemple 11. Représenter graphiquement la fonction polynôme f du second degré définie par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

Solution 5. .

— On a $a = -1 < 0$ alors f admet un maximum en $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = 2$ égal à $\beta = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = f(2) = 4$.

— Les variations de f sont donc données dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Figure 10 –

— Pour représenter graphiquement la fonction f, on calcule les coordonnées de quelques points appartenant à la courbe $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \\ f(1) = 3 \end{cases}$. On obtient d'autres points par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$. On trace la courbe représentative de f au-dessous.

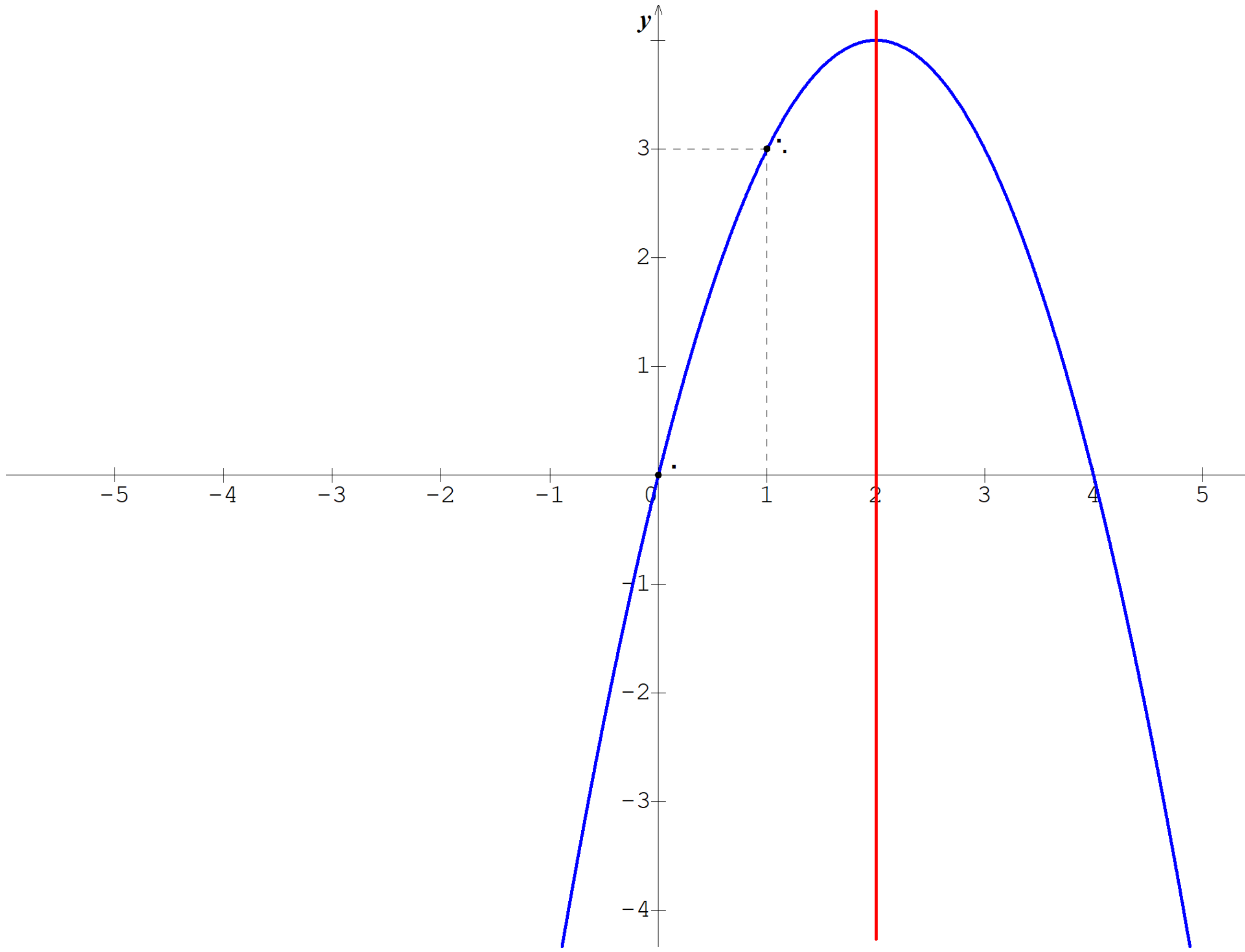

Figure 11 –

FIN