Chapitre 06 : Produit Scalaire

Première Spé

Yahya MATIOUI

20 juillet 2023

www.etude-generale.com

Introduction

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877) Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton*[1] (1805 ; 1865) en 1853.

1 Définitions et propriétés

1.1 Définitions

Définition 1. Soit deux points A et B.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, est la distance AB.

On introduit la définition du produit scalaire.

Définition 2. Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Exemple 1. On donne $AB = 2$, $AC = 5$ et $B\hat{A}C = \frac{\pi}{4} rad$. Donc

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 5 \times cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Proposition 1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$.

1. Sir William Rowan Hamilton est un mathématicien, physicien et astronome irlandais

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Définition 3. On appelle produit scalaire de deux vecteurs, non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ tel que :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times cos\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$

Remarque 1. :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ se lit « $\overrightarrow{u}$scalaire $\overrightarrow{v}$ »
2. Si l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{v}$ est nul, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Proposition 2. *On considère deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

1. *Si $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$*
2. *Si $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraire alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.*

Démonstration. On considère deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et trois points A, B et C tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On a

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

□

- Si $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens alors : $\widehat{BAC} = 0$rad par suite $cos\left(\widehat{BAC}\right) = 1$. Ainsi
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$
- Si $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraire alors : $\widehat{BAC} = \pi$rad d'ou $cos\left(\widehat{BAC}\right) = -1$. Ainsi
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

Définition 4. (**Projeté orthogonal**)

On considère trois points du plan A, B et C et on appelle H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

On a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} \\ &= \begin{cases} AB \times AH & si \;\; \overrightarrow{AB} \;\; et \;\; \overrightarrow{AH} \;\; sont \;\; de \;\; meme \;\; sens \\ \\ -AB \times AH & si \;\; \overrightarrow{AB} \;\; et \;\; \overrightarrow{AH} \;\; sont \;\; de \;\; sens \;\; contraire \end{cases}\end{aligned}$$

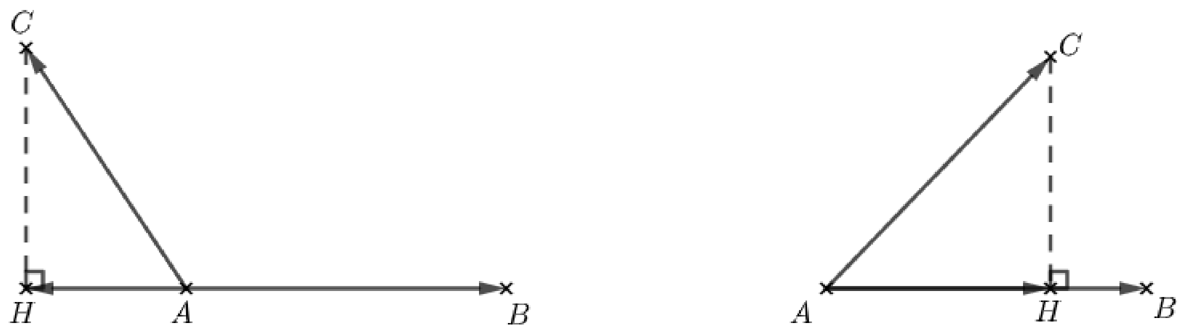

FIGURE 1 –

Démonstration. On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$

–Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, c'est-à-dire $0 \leq \widehat{BAC} < \dfrac{\pi}{2}$

D'une part $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$.

D'autre part dans le triangle ACH rectangle en H on a $cos\left(\widehat{HAC}\right) = \dfrac{AH}{AC}$ donc $AH = AC \times cos\left(\widehat{HAC}\right)$. Or $\widehat{HAC} = \widehat{BAC}$

Ainsi

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

–Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2} < \widehat{BAC} \leq \pi$

D'une part $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$.

D'autre part, dans le triangle ACH rectangle en H on a $cos\left(\widehat{HAC}\right) = \dfrac{AH}{AC}$ donc $AH = AC \times cos\left(\widehat{HAC}\right)$ .Or $\widehat{BAC} = \pi - \widehat{HAC}$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times cos\left(\pi - \widehat{HAC}\right) \\
&= AB \times AC \times \left(-cos\left(\widehat{HAC}\right)\right) \\
&= -AB \times \underbrace{AC \times cos\left(\widehat{HAC}\right)}_{=AH} \\
&= -AB \times AH \\
&= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}
\end{aligned}$$

–Si $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$. Les points A et H sont confondus donc $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{0}$ par suite

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 0$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times cos\left(\widehat{HAC}\right)\\ &= AB \times AC \times 0\\ &= 0\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}\end{aligned}$$

□

Exemple 2. On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $BC = 2$

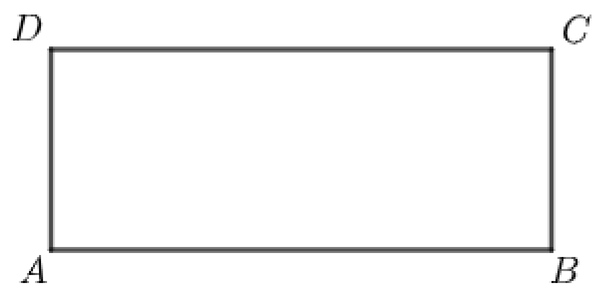

FIGURE 2 –

Le point B est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Donc

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = AB \times AB = 5 \times 5 = 25$$

1.2 Propriétés

Proposition 3. *On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.*

Démonstration. On considère deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et trois points A, B et C tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times cos\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times cos\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times cos\left(\widehat{CAB}\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times cos\left(\widehat{CAB}\right)\\ &= \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}\end{aligned}$$

□

Proposition 4. .

$$\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \qquad\qquad \overrightarrow{u}.\left(k\overrightarrow{v}\right)=k\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$$

Démonstration. Admis

□

Identités remarquables

1. $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$(également noter :
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2).$$
2. $\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
3. $\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2$

Exemple 3. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=1$.

Calculer

1. $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)$
2. $\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)$
3. $-2\overrightarrow{v}\left(3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)$.

— $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2=2^2-3^2=-5$

et

— $\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|^2+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=2^2+1=5$

et

— $-2\overrightarrow{v}\left(3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=-6\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}^2=-6\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+2\|\overrightarrow{v}\|^2=-6+2\times 3^2=12$

Produit scalaire par la norme

Proposition 5. *On considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$
3. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

Démonstration. .

–On a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\\&=\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}^2\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$

par suite $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

–On a

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) \\
&= \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2
\end{aligned}$$

par suite $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

–On a d'après les preuves précédentes :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \left(\|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2\right) \\
&= 4\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

par suite $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

□

Corollaire 1. *On considère un triangle ABC. On a alors :*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

□

Exemple 4. On considère un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 8$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(5^2 + 6^2 - 8^2\right) \\ &= \frac{-3}{2}\end{aligned}$$

2 Produit scalaire et orthogonalité

Définition 5. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits orthogonaux si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarque 2. Par convention, le vecteur $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

Proposition 6. *On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration. :
–Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
–Supposons le contraire. (c'est-à-dire $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont tous les deux différents du vecteur nul)

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times cos\left(\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow cos\left(\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

□

Exemple 5. On considère un carré $ABCD$ et les points E et F milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. On veut montrer que les droites (BD) et (EF) sont perpendiculaires.

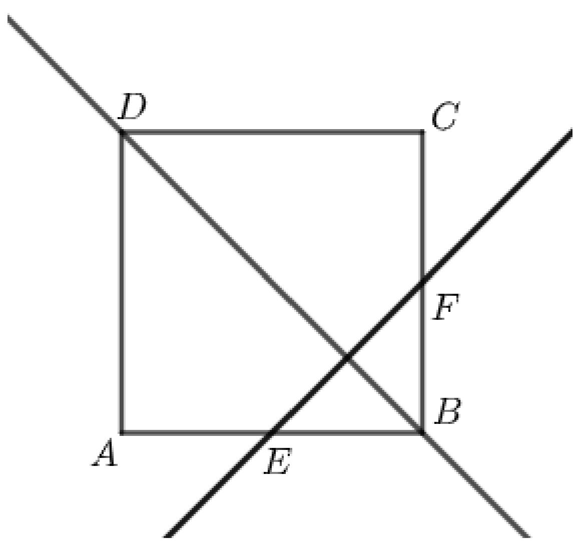

FIGURE 3 –

On a $\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$ABCD$ est carré donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et par suite $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$. De plus $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $AB=BC$.

Donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EF} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}\right)\\
&= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BF}\\
&= \overrightarrow{BA}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BA}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AD}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AD}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+0+0+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}\\
&= -\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}BC^2\\
&= \frac{-1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AB^2\\
&= 0
\end{aligned}$$

par suite $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EF}=0$, donc les droites (BD) et (EF) sont perpendiculaires.

3 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans cette partie le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

Définition analytique du produit scalaire.

Proposition 7. *On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$. On alors*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=x.x'+y.y'$$

Démonstration. On a $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j}$. Le repère est orthonormé donc $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}=0$, $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=1$ et $\left\|\overrightarrow{j}\right\|=1$. Par suite :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}&=\left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}\right)\left(x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j}\right)\\&=x.x'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i}+x.y'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}+y.x'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{i}+y.y'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}\\&=x.x'\left\|\overrightarrow{i}\right\|^2+0+0+y.y'\left\|\overrightarrow{j}\right\|^2\\&=x.x'+y.y'\end{aligned}$$

□

Exemple 6. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(2,5)$ et $\overrightarrow{v}(3,-4)$. Donc

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=2\times3+5\times(-4)=6-20=-14$$

Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Exemple 7. On considère quatre points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

— Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-1\end{pmatrix}\quad et\ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5-1\\-2-4\end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$.

— Calculons le produit scalaire des deux vecteurs.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=3\times4+2\times(-6)=12-12=0$$

Le produit scalaire est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Proposition 8. *On considère un vecteur $\overrightarrow{u}(x,y)$. On a alors $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.*

Démonstration. On a $\|\overrightarrow{u}\|^2=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=x^2+y^2$. Donc $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

□

Exemple 8. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}(2,5)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}\|&=\sqrt{2^2+5^2}\\&=\sqrt{4+25}\\&=\sqrt{29}.\end{aligned}$$

Proposition 9. *On considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\,(x, y)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x', y')$.
$\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $x.x' + y.y' = 0$.

Démonstration. .
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0$.

□

4 Applications du produit scalaire

4.1 Théorème d'AL-KASHI

Le théorème d'AL-KASHI a pour but de déterminer une relation entre les trois longueurs d'un triangle, il s'agit de la généralisation du théorème de Pythagore.

Théorème 1. *On considère un triangle* ABC

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$
- $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times cos\left(\widehat{ACB}\right)$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times cos\left(\widehat{ABC}\right)$.

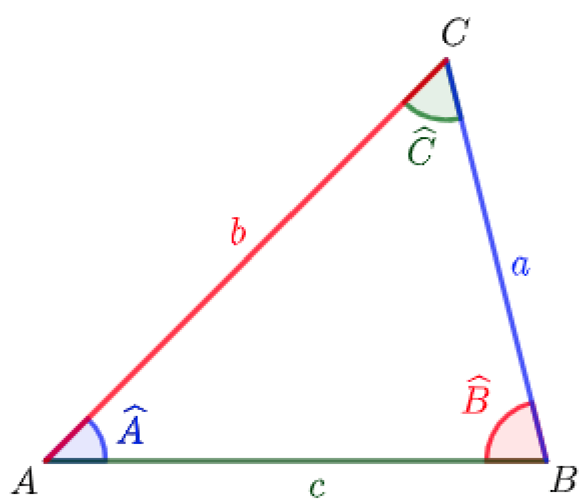

FIGURE 4 –

Remarque 3. Avec les notations de la figure, on écrit souvent les formules ainsi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\hat{A}\right)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\hat{B}\right)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\hat{C}\right)$$

Démonstration. On ne prouvera que la formule :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2 \\
&= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)
\end{aligned}$$

□

Remarque 4. Si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ on retrouve le théorème de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemple 9. On considère un triangle ABC tel que : $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

D'après le théorème d'AL-KASHI, on a

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right) \\
&= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 16 + 36 - 48 \times \frac{1}{2} \\
&= 28
\end{aligned}$$

donc $BC = \sqrt{28} \simeq 5,3$

Appliquer le théorème d'AL-KASHI pour calculer un angle.

Exemple 10. On considère la figure ci-dessous. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

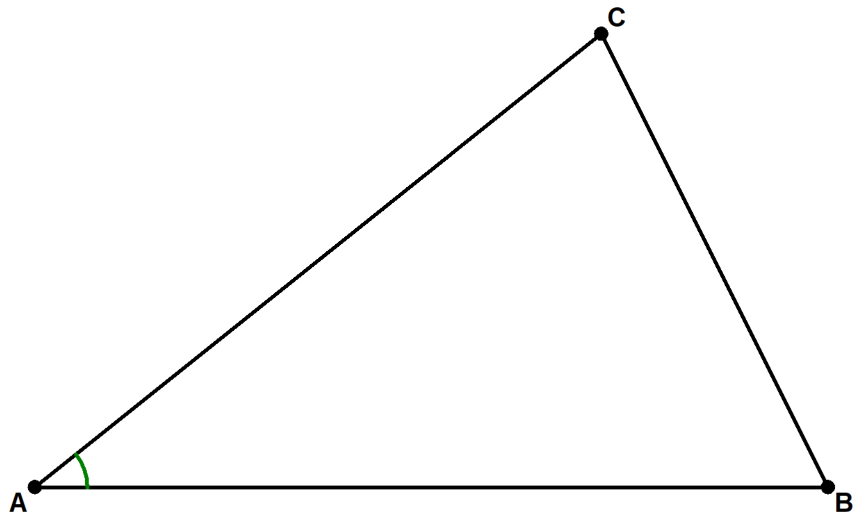

FIGURE 5 –
$AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 4$.

D'après le théorème d'AL-KASHI, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
$$\Leftrightarrow cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$$
$$\Leftrightarrow cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 5}$$
$$\Leftrightarrow cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{45}{60}$$
$$\Leftrightarrow cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{3}{4}$$

donc $\widehat{BAC} = 41°$.

4.2 Ensemble de points

Théorème 2. *Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M on a la relation*

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ et $IA = \dfrac{AB}{2}$.

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\
&= \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\\
&= MI^2+\overrightarrow{MI}.\left(-\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\left(-\overrightarrow{IA}\right)\\
&= MI^2-\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}^2\\
&= MI^2-IA^2\\
&= MI^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2\\
&= MI^2-\frac{1}{4}AB^2
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2-\frac{1}{4}AB^2$.

□

Exemple 11. On considère deux points A et B tels que : $AB = 4$. On veut déterminer l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 3$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 3 &\Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}AB^2 = 3\\
&\Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}\times 4^2 = 3\\
&\Leftrightarrow MI^2-4 = 3\\
&\Leftrightarrow MI^2 = 7\\
&\Leftrightarrow MI = \sqrt{7}
\end{aligned}$$

L'ensemble des points cherché est donc le cercle de centre I, milieu du segment $[AB]$ et de rayon $\sqrt{7}$.

Proposition 10. *On considère deux points A et B.*

L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration. On appelle I le milieu du segment $[AB]$. Ainsi $AB = 2AI$.

D'après le théorème précédent on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} \\
&\Leftrightarrow MI^2 = \frac{(2AI)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow MI^2 = 4 \times \frac{AI^2}{4} \\
&\Leftrightarrow MI^2 = AI^2 \\
&\Leftrightarrow MI = AI
\end{aligned}$$

L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I et de rayon $[IA]$ c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

□

Proposition 11. *On considère deux points A et B et un point M distinct de A et B.*

Le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Démonstration. Le point M est distinct des points A et B.

ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

□

FIN