Chapitre 08 : Probabilités conditionnelles

Première Spé

Yahya MATIOUI

22 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 Rappels

1.1 Définitions

— **Expérience aléatoire** : Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles mais dont on ne peut pas prévoir le résultat qui se produira effectivement.

Exemple 1. :

1. Lancer un dé à 6 faces sur une piste de jeu.
2. Lancer une pièce de monnaie.
3. Poser une question à un lycéen choisi au hasard.

— **Univers** : Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note Ω. On a alors : $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Exemple 2. :

1. Il y a 6 issues possibles pour un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Il y a 2 issues possibles pour une pièce de monnaie : $\Omega = \{1, 2\}$.
3. Il y a 700 lycéens dans l'échantillon qui peuvent être interroger.

— **Evénement** : Sous ensemble de l'ensemble univers Ω. On le note avec une majuscule.

Exemple 3. :

1. A : « Obtenir un nombre pair avec un dé » c'est-à-dire $A = \{2, 4, 6\}$
2. B : « Obtenir face avec une pièce » c'est-à-dire $B = \{F\}$

3. C : « Obtenir un lycéen âgé de moins de 17 ans »

— **Evénement élémentaire** : événement qui ne contient qu'un seul élément. On le note alors e_i.

Exemple 4. :

1. e_6 : « Obtenir un six avec un dé »
2. e_i : « Interroger le lycéen i parmi 700 lycéen »

— **Evénement certain** : C'est l'univers Ω.
— **Evénement impossible** : C'est l'ensemble vide ϕ.

1.2 Opérations sur les événements

L'étude des probabilités fait appel à la logique mathématique : il s'agit d'analyser, dans un texte les éléments qui serviront aux calculs de probabilités. Les mots à repérer sont les conjonctions "et", "ou", et la négation "ne. . . pas" La logique mathématique fait aux opérations sur les ensembles. On définit les opérations élémentaires suivantes : le complémentaire, l'intersection et l'union. D'autres opérations peuvent se décomposer à l'aide de ces trois opérations de base.

1.2.1 Événement contraire

Définition 1. L'événement contraire d'un événement A est l'événement noté $\overline{A}$ composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in \Omega \quad et\ x \in A$$

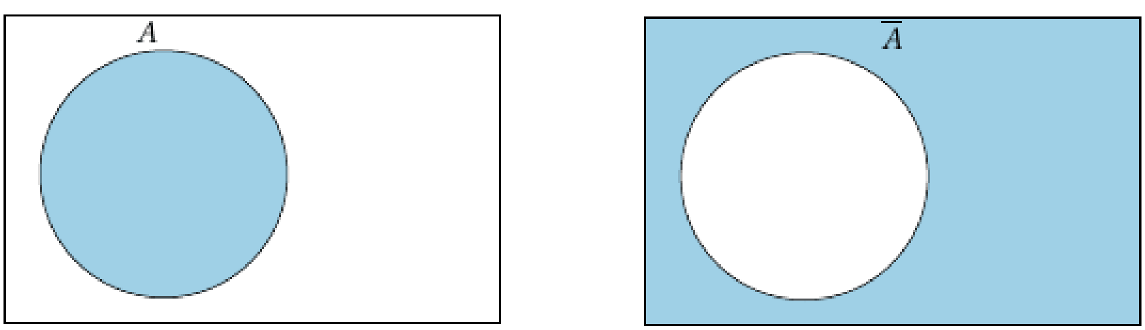

Figure 1 –

Exemple 5. Dans un lancer de dé, on considère l'événement A : « Obtenir 1 ou 2 » L'événement contraire est $\overline{A}$ « Obtenir 3,4,5 ou 6 »

1.2.2 Intersection de deux événements

Définition 2. L'intersection de deux événements A et B est l'événement noté $A \bigcap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B.

$$x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in A \quad et \quad x \in B$$

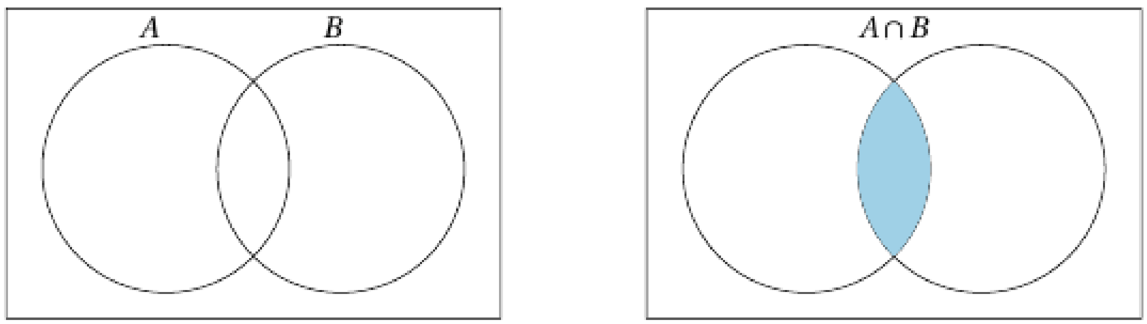

FIGURE 2 –

Exemple 6. Dans un lancer de dé, on appelle A l'événement « Obtenir 1,2 ou 3 » et B l'événement « Obtenir 3 ou 5 » . L'événement $A \bigcap B$ est « Obtenir 3 ».

1.2.3 Union de deux événements

Définition 3. L'union de deux événements A et B est l'événement noté $A \bigcup B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou (non exclusif) à B.

$$x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A \quad ou \quad x \in B$$

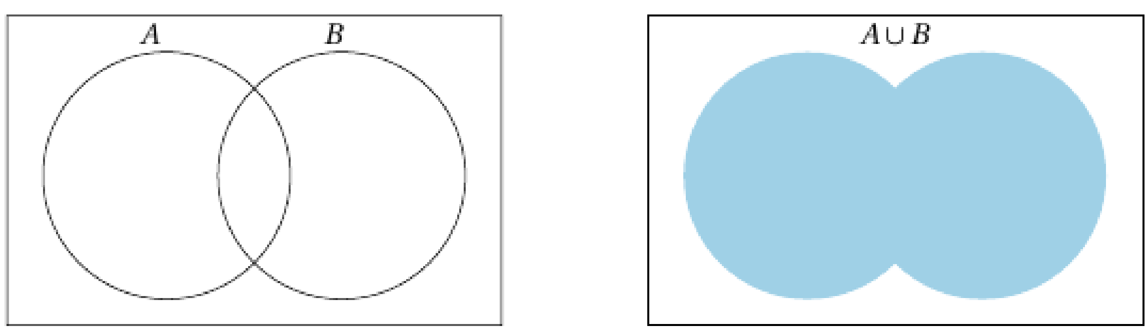

FIGURE 3 –

Remarque 1. Les éléments de $A \bigcup B$ peuvent appartenir à la fois à A et à B.

Exemple 7. Dans un lancer de dé, on appelle A l'événement « Obtenir 1,2 ou 3 » et B l'événement « Obtenir 3 ou 5 ». L'événement $A \bigcup B$ est « Obtenir $1, 2, 3$ ou 5 ».

1.2.4 Événements incompatibles

Définition 4. Les événements A et B sont dits <u>disjoints</u> ou <u>incompatibles</u> si l'événement $A \bigcap B$ est impossible.

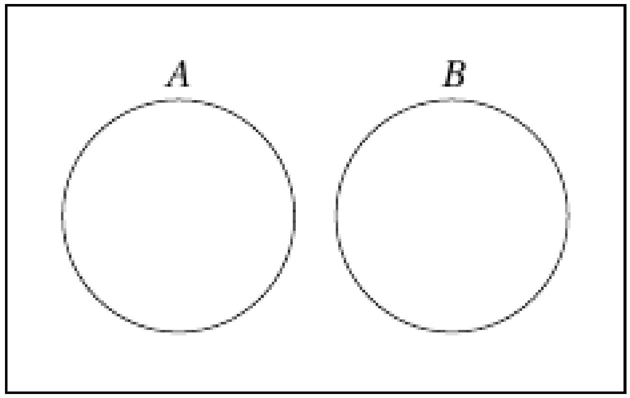

FIGURE 4 –

Exemple 8. Dans un lancer de dé, les événements « Obtenir 1 ou 2 » et « Obtenir 4 ou 5 » sont incompatibles.

1.2.5 Autres opérations

Les opérations peuvent se définir à l'aide du complémentaire, de l'intersection et de l'union de deux ensembles.

— **Différence** : $A - B$

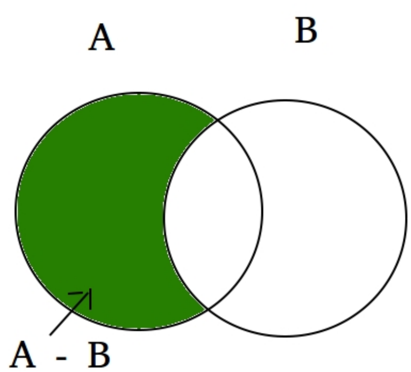

FIGURE 5 –

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \bigcap \overline{B}$$

— **Différence symétrique** : $A \triangle B$

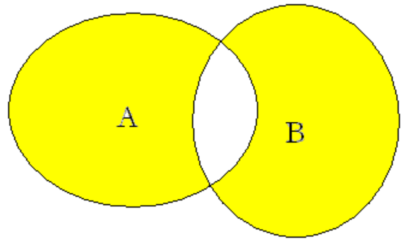

FIGURE 6 –

$$A \triangle B = \left(A \bigcup B\right) \setminus \left(A \bigcap B\right)$$

1.2.6 Lois de Morgan

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B} \qquad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

1.3 Probabilité

Définition 5. On appelle loi de probabilité sur un ensemble Ω, la fonction p à valeur dans $[0, 1]$ définie par les conditions suivantes :

1. $p(\Omega) = 1$
2. Si A et B sont incompatibles alors $p\left(A \bigcup B\right) = p(A) + p(B)$.

Proposition 1. *A partir de cette définition, on peut déduire :*

1. $p(e_1) + p(e_2) + ... + p(e_n) = \sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$.
2. $p(\phi) = 0$
3. Pour tous événements A et B, on a les relations :

   –$0 \leq p(A) \leq 1$
   –$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$
   –$p\left(A \bigcup B\right) = p(A) + p(B) - p\left(A \bigcap B\right)$.

1.4 Loi équiprobable

Définition 6. Une loi de probabilité est équiprobable si chaque événement élémentaire e_i a la même probabilité d'apparition. $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$: $\boxed{\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, p(e_i) = \frac{1}{n}}$

Exemple 9. Pour un dé équilibré, chaque face a une probabilité de $\frac{1}{6}$ d'apparition.

Théorème 1. *Dans une loi équiprobable, la probabilité de l'événement A vérifie :*

$$p(A) = \frac{nombre \quad d'éléments \quad de \quad A}{nombre \quad d'éléments \quad de \quad \Omega}$$

Remarque 2. Lorsque la loi de probabilité est équiprobable, le calcul de probabilités revient à un problème de dénombrement. On peut alors utiliser pour dénombrer les différents cas, un arbre, un tableau double entrée, un diagramme de Venn, une liste,. . .

Exemple 10. Dans un jeu de 32 cartes, on considère l'événement A « tirer un roi », on a

$$p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

2 Probabilité conditionnelle

2.1 Définition

Le but de ce paragraphe est d'étudier la probabilité d'un événement B conditionné par un événement A.

Définition 7. On appelle <u>probabilité conditionnelle</u> de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note : $p_A(B)$.

Proposition 2. $\boxed{p_A(B) = \frac{p(A \bigcap B)}{p(A)}}$

Exemple 11. On tire une carte noire d'un jeu de 32 cartes. On veut déterminer la probabilité que cette carte soit un roi. On considère alors les événements :

- N : « la carte tirée est noire »
- R : « la carte tirée est un roi »
- Calculons $p_N(R)$.

  On a $p_N(R) = \frac{p(N \bigcap R)}{p(N)}$ et comme $p(N) = \frac{1}{2}$ et $p(N \bigcap R) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ donc

$$p_N(R) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} \times 2 = \frac{1}{8}$$

Les probabilités conditionnelles suivent les mêmes règles que les probabilités en général, c'est-à-dire :

Proposition 3. *On considère deux événements A, tel que $p(A) \neq 0$, et B*

1. $0 \leq p_A(B) \leq 1$
2. $p_A(A) = 1$
3. $p_A(B) + p_A\left(\overline{B}\right) = 1$. C'est-à-dire $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$.

Démonstration. :

– On a $p(A \bigcap B) \geq 0$ et $p(A) \geq 0$ donc $p_A(B) > 0$. De plus $A \bigcap B \subset A$ par suite $p(A \bigcap B) \leq p(A)$ donc $\dfrac{p(A \bigcap B)}{p(A)} \leq 1$ c'est-à-dire $p_A(B) \leq 1$. Donc

$$0 \leq p_A(B) \leq 1$$

– On a

$$\begin{aligned} p_A(A) &= \frac{p(A \bigcap A)}{p(A)} \\ &= \frac{p(A)}{p(A)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

–La Propriété $3^{éme}$ démontrée au probabilités totales.

$\square$

Proposition 4. *On considère deux événements A et B de probabilités tous les deux non nulles.*

$\boxed{p(A \bigcap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)}$

Démonstration. Par définition $p_A(B) = \dfrac{p(A \bigcap B)}{p(A)}$ donc $p(A \bigcap B) = p_A(B) \times p(A)$. De même $p(A \bigcap B) = p_B(A) \times p(B)$.

$\square$

2.2 Représentation par un arbre pondéré

Exemple 12.

— On donne : $p(A) = 0,4$, $p_A(B) = 0,3$ et $p_{\overline{A}}(B) = 0,2$

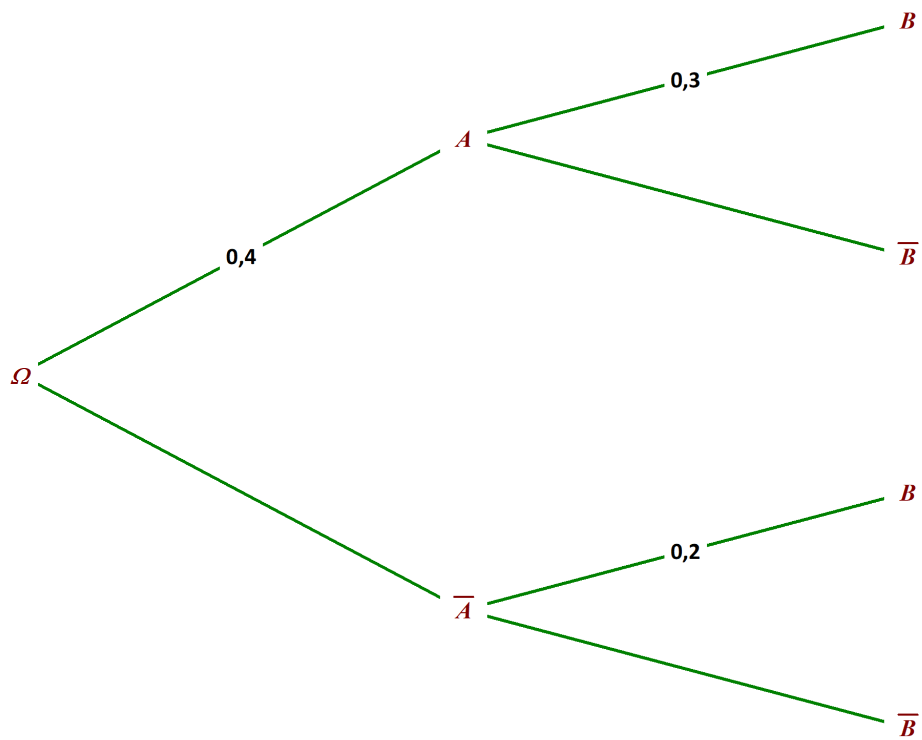

FIGURE 7 –

— On complète les probabilités manquantes : On utilise la formule $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A\left(B\right).$

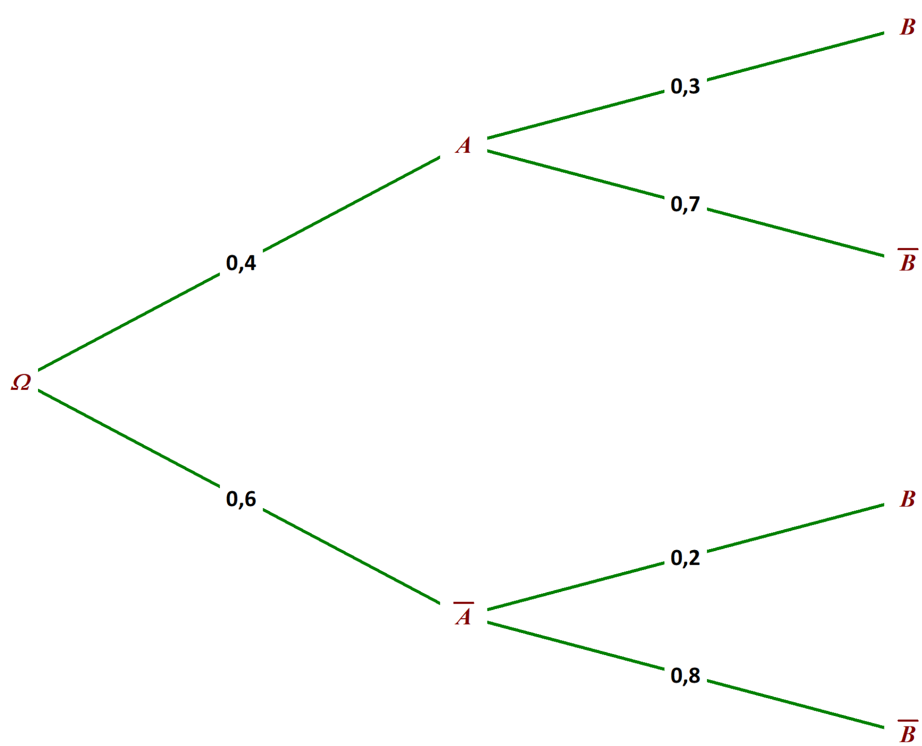

FIGURE 8 –

— On calcule les probabilités d'intersection :

$$p\left(A\bigcap B\right)=p\left(A\right)\times p_{A}\left(B\right)=0,4\times 0,3=0,12$$

$$p\left(\overline{A}\bigcap \overline{B}\right)=p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)=0,6\times 0,8=0,48$$

$$p\left(\overline{A}\bigcap B\right)=p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}\left(B\right)=0,6\times 0,2=0,12$$

$$p\left(A\bigcap \overline{B}\right)=p\left(A\right)\times p_{A}\left(\overline{B}\right)=0,4\times 0,7=0,28$$

Construire un arbre pondéré

Exemple 13. On donne l'arbre pondéré ci-dessous

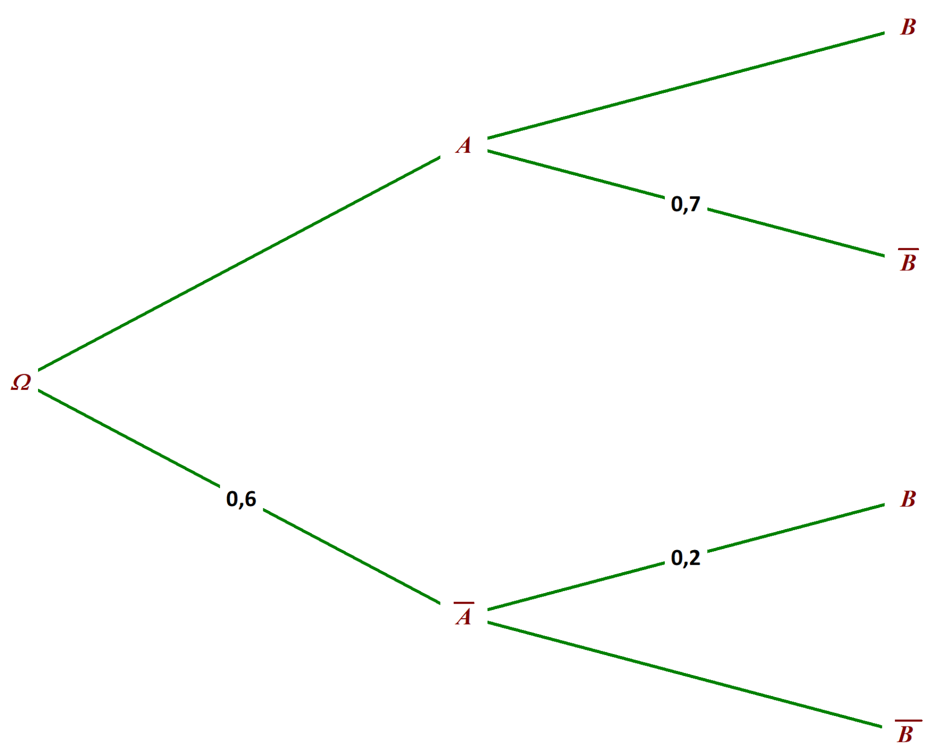

FIGURE 9 –

1. Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités.
2. A l'aide de l'arbre, calculer $p\left(A\right)$, $p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$ et $p\left(A\bigcap \overline{B}\right)$.

— On a $p\left(\overline{A}\right)=0,6$, $p_{A}\left(\overline{B}\right)=0,7$ et $p_{\overline{A}}\left(B\right)=0,2$
— A l'aide de l'arbre, on a

$$p(A)+p\left(\overline{A}\right)=1 \Leftrightarrow p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-0,6=0,4$$

$$p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)=1-p_{\overline{A}}(B)=1-0,2=0,8$$

$$p\left(A\bigcap\overline{B}\right)=p(A)\times p_A\left(\overline{B}\right)=0,4\times 0,7=0,28$$

2.3 Formule des probabilités totales

Définition 8. On considère un entier naturel n non nul.

Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment un système complet d'événements fini ou partition de l'univers Ω si :

1. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}, p(A_i) \neq 0$.
2. Les événements A_i sont disjoints deux à deux
3. $A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n = \Omega$.

Proposition 5. *On considère les événements $A_1, A_2, ...A_n$ forment un système complet d'événements fini et un événement B*

$\boxed{p(B)=p(A_1\bigcap B)+p(A_2\bigcap B)+...+p(A_n\bigcap B)}$

Remarque 3. Très souvent dans les exercices on utilisera cette propriété dans les cas suivants :

1. Si $n=2$: A et $\overline{A}$ forment un système complet $\left(\begin{cases} A\bigcup\overline{A}=\Omega \\ \\ A\bigcap\overline{A}=\phi\end{cases}\right)$ d'événements fini, par suite

$$p(B)=p\left(A\bigcap B\right)+p\left(\overline{A}\bigcap B\right)$$

2. Si $n=3$: On considère que les événements A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements fini, par suite

$$p(B)=p\left(A_1\bigcap B\right)+p\left(A_2\bigcap B\right)+p\left(A_3\bigcap B\right).$$

Exemple 14. Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

— Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas

— Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif »

1. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
2. Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

— On construit et on complète un arbre pondéré :

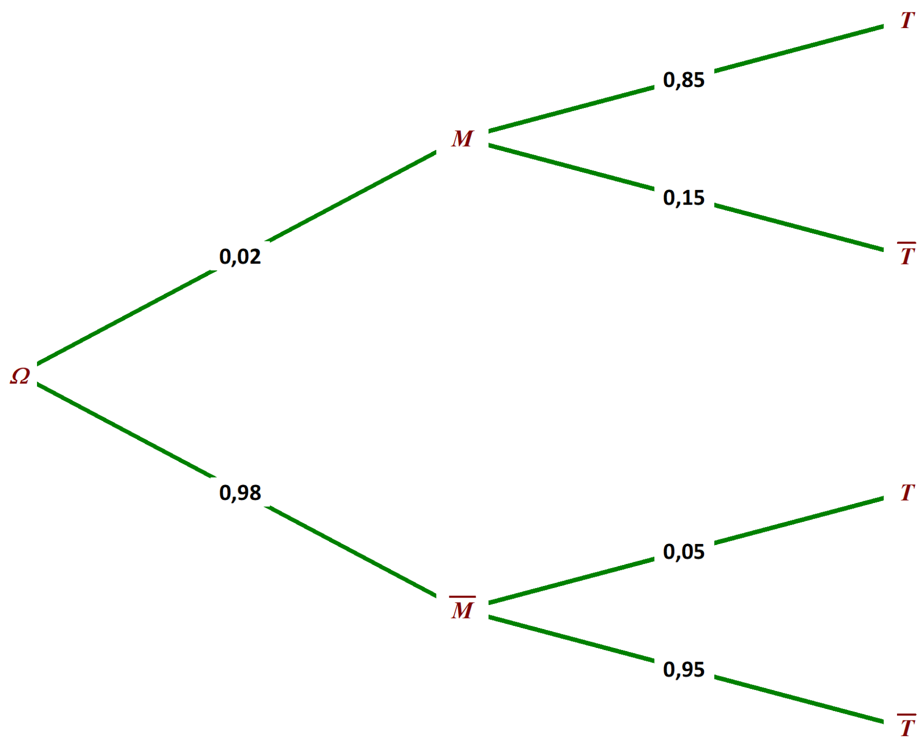

Figure 10 –

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p\left(T \bigcap \overline{M}\right) + p\left(T \bigcap M\right) \\ &= 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 \\ &= 0,066 \end{aligned}$$

La probabilité que le test soit positif est égale à $6,6\%$

— On a $p_T(M) = \dfrac{p\left(T \bigcap M\right)}{p(T)} = \dfrac{0,02 \times 0,85}{0,066} \simeq 0,26$. La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26%

Exemple 15. On considère deux événements A, tel que $p(A) \neq 0$, et B. Montrer que : $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$.

On a

$$\begin{aligned} p_A(B) + p_A(\overline{B}) &= \frac{p(A \bigcap B)}{p(A)} + \frac{p(A \bigcap \overline{B})}{p(A)} \\ &= \frac{p(A \bigcap B) + p(A \bigcap \overline{B})}{p(A)} \longleftarrow \quad B \quad et \quad \overline{B} \quad forment \quad une \quad partition \\ &= \frac{p(A)}{p(A)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$, par suite $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

3 Probabilité et indépendance

Définition 9. On dit que deux événements A et B sont <u>indépendants</u> si

$$p\left(A \bigcap B\right) = p(A) \times p(B).$$

Cela signifie que les deux événements peuvent se produire indépendamment l'un de l'autre.

Exemple 16. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

A : « la carte tirée est un as »

C : « la carte tirée est un cœur »

On a $p(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $p(C) = \dfrac{1}{4}$ donc $p(A) \times p(C) = \dfrac{1}{32}$. Il n'y a qu'un seul as de cœur donc $p(A \bigcap C) = \dfrac{1}{32}$.

Par suite $p(A \bigcap C) = p(A) \times p(C)$ et les événements A et C sont indépendants.

Proposition 6. *On considère deux événements A et B de probabilités non nulles.*

$$A \quad et \quad B \quad sont \quad indépendants \Leftrightarrow p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p_B(A) = p(A)$$

Démonstration. On a

$$A \quad et \quad B \quad sont \quad indépendants \Leftrightarrow p(A \bigcap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow p_A(B) \times p(A) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

on peut diviser les deux membres par $p(A)$ puisque, par définition de $p_A(B)$ on a $p(A) \neq 0$.

On procède de même pour montrer que $p_B(A) = p(A)$.

□

Calculer une probabilité sur une répétition d'expériences

Exemple 17. On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1. Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

— Obtenir deux boules blanches.
— Obtenir une boule blanche et une boule rouge.
— Obtenir au moins une boule blanche.

1. On note B l'évènement « On tire une boule blanche » et R l'évènement « On tire une boule rouge ». Donc

$$p(B) = \frac{3}{5} = 0,6 \ , \ p(R) = \frac{2}{5} = 0,4$$

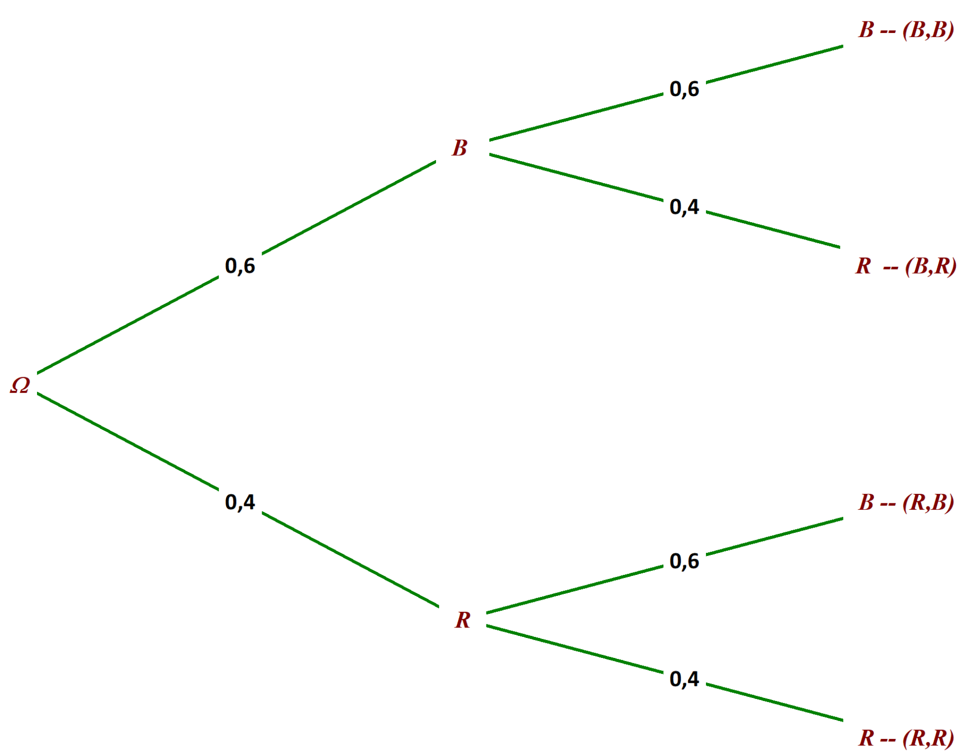

FIGURE 11 –

2. Déterminons les probabilités des événements suivants :

a. Obtenir deux boules blanches. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}$ donc d'après l'arbre, on a :

$$p\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} = 0,6 \times 0,6 = 0,36$$

b. Obtenir une boule blanche et une boule rouge. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} R \\ B \end{pmatrix}$ donc d'après l'arbre, on a :

$$p\begin{pmatrix} B & ou & R \\ R & & B \end{pmatrix} = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48$$

c. Obtenir au moins une boule blanche. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} R \\ B \end{pmatrix}$ donc d'après l'arbre, on a :

$$p\begin{pmatrix} B & ou & B & ou & R \\ R & & B & & B \end{pmatrix} = 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 = 0,84$$

Proposition 7. *On considère deux événements indépendants A et B alors A et $\overline{B}$ sont également indépendants.*

Démonstration. On suppose que $0 < p(A) < 1$. A et B sont indépendants c'est-à-dire $p(A \bigcap B) = p(A) \times p(B)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(A) &= p\left(A \bigcap B\right) + p\left(A \bigcap \overline{B}\right) \\ &= p(A) \times p(B) + p\left(A \bigcap \overline{B}\right) \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} p\left(A \bigcap \overline{B}\right) &= p(A) - p(A) \times p(B) \\ &= p(A)(1 - p(B)) \\ &= p(A) \times p\left(\overline{B}\right) \end{aligned}$$

donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

$\square$

FIN