Chapitre 07 : Géométrie Repérée

Première Spé

Yahya MATIOUI

18 juillet 2023

www.etude-generale.com

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.

1 Rappels

Proposition 1. :

1. Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
3. Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
4. Soit deux points $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

   La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

   Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$.

Exemple 1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

La droite (d) admet une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$.

Comme $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), on a $\begin{cases} -b = -1 \\ \\ a = 5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 5 \\ \\ b = 1 \end{cases}$. Une équation de (d) est donc de la forme : $5x + y + c = 0$

Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ de A dans l'équation, on a

$$\begin{aligned} 5 \times 3 + 1 + c = 0 &\Leftrightarrow 15 + 1 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow 16 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = -16 \end{aligned}$$

Une équation de la droite (d) est donc $5x + y - 16 = 0$.

Remarque 1. Une autre méthode consiste à utiliser la colinéarité.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan, on a

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (d) &\Leftrightarrow \textit{les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \textit{ et } \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \textit{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5(x-3) - (-1) \times (y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 15 + y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x + y - 16 = 0 \end{aligned}$$

donc une équation de la droite (d) est donc $5x + y - 16 = 0$.

Exemple 2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par les points $B\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de la droite (d), c'est-à-dire $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} -b = -4 \\ a = -6 \end{cases}$ d'ou $a = -6$ et $b = 4$. Une équation cartésienne de (d) est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$

Comme $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \in (d)$ donc $-6\times 5+4\times 3+c=0$ donc $c=18$.
Une équation cartésienne de (d) est : $(d) : -6x+4y+18=0$.

Remarque 2. Une équation cartésienne n'est pas unique. On peut multiplier les coefficients de l'équation par un facteur k non nul. Par exemple, la droite (d) est défini par :

$$(d) : -6x+4y+18=0 \overset{k=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} -3x+2y+9=0$$

2 Droite dans le plan (Étude analytique) vecteur normal à une droite

2.1 Vecteur normal à une droite

Définition 1. Soit (d) une droite du plan.

Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (d) est appelé vecteur normal à la droite (d).

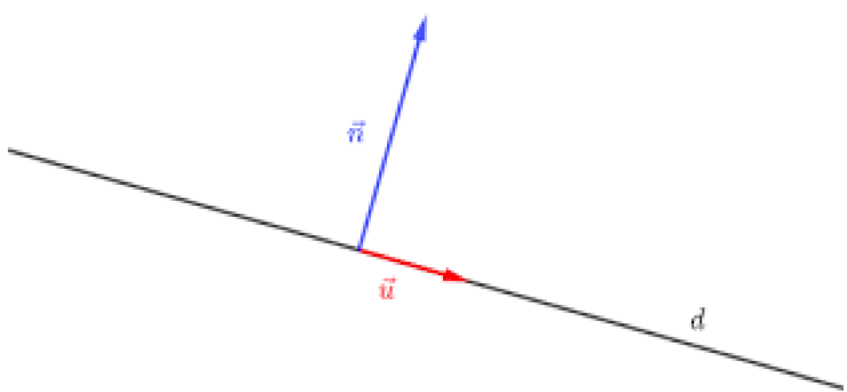

FIGURE 1 –
- $\overrightarrow{u}$ est le vecteur directeur
- $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal

Proposition 2. :

- Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstration. .

–Soit un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ de la droite (d)

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad orthogonaux \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0 \end{aligned}$$

–Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $-b\times a + a\times b = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

□

Exemple 3. Soit la droite d'équation cartésienne $2x-3y-6=0$.

— Un vecteur normal de la droite est : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

— Un vecteur directeur de la droite est : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 2\times 3 + (-3)\times 2 = 0$.

Remarque 3. Soit (D) et (D') deux vecteurs d'équations respectives : $ax+by+c=0$ et $a'x+by'+c'=0$. (D) et (D') sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Exemple 4. On considère la droite (d) passant par le point $A\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

On a $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (d), une équation cartésienne de (d) est de la forme

$$3x - y + c = 0$$

comme le point $A\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \in (d)$, donc $3\times(-5) - 4 + c = 0$ donc $c = 19$. Une équation cartésienne de (d) est : $3x - y + 19 = 0$.

Remarque 4. Déterminons une équation cartésienne en utilisant une autre méthode.

Déterminons une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned}M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow 2(x-1)+3(y-1)=0\\ &\Leftrightarrow 2x-2+3y-3=0\\ &\Leftrightarrow 2x+3y-5=0\end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de la droite (d) est : $2x+3y-5=0$.

Exemple 5. On donne la droite (d) : $3x-y+5=0$.

–Déterminons une équation de la droite (Δ) passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ perpendiculaire à (d) .

Si $(\Delta)\perp(d)$ alors un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ à (d) est un vecteur directeur de la droite (Δ), par suite $b=-3$ et $a=-1$. Donc $-x-3y+c=0$

Comme $A\in(\Delta)$ alors $-1-3\times2+c=0$ donc $c=7$. Une équation cartésienne de (Δ) est :

$$-x-3y+7=0 \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} x+3y-7=0$$

– Déduisons les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite (d).

Si H est le projeté orthogonal de A sur (d) alors, H est l'intersection des droites (d) et (Δ).

Les coordonnées des H vérifient le système : $\begin{cases}3x-y=-5 & (\times3)\\ \\ x+3y-7=0\end{cases}$

Alors

$$(9x-3y)+(x+3y)=-15+7\Leftrightarrow 10x=-8\Leftrightarrow x=\frac{-4}{5}$$

d'après la première équation : $y = 3x + 5 = \dfrac{-12}{5} + 5 = \dfrac{13}{5}$. Donc $H\left(\dfrac{-4}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$.

3 Équations de cercle

Proposition 3. *Une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r est :*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

que l'on peut écrire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Démonstration. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan, on a

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C) &\Leftrightarrow \Omega M = r \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

□

Exemple 6. Une équation du cercle (C) du centre $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{2}$ est :

$$\left(x - \underbrace{\underset{a}{\underset{\uparrow}{1}}}\right)^2 + \left(y - \underbrace{\underset{b}{\underset{\uparrow}{(-1)}}}\right)^2 = \left(\underset{r}{\underset{\uparrow}{\sqrt{2}}}\right)^2 = 2$$

c'est-à-dire $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$, que l'on peut écrire sous la forme $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

Remarque 5. Déterminer les caractéristiques d'un cercle.

Montrer que l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

est un cercle. Préciser le rayon et les coordonnées du centre.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan, on a

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x-2y-2=0 &\Leftrightarrow \underbrace{x^2-2x}_{on\ \ regroupe\ \ x} + \underbrace{y^2-2y}_{on\ \ regroupe\ \ y} -2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-1)^2-1-2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2-2-2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2-4=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=4=2^2 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rayon $r=2$.

FIN