Généralités sur les fonctions numériques

Première Spé

Yahya MATIOUI

25 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 Vocabulaire sur les fonctions

1.1 Définition générale d'une fonction

Définition 1. On appelle fonction f la donnée d'un ensemble E, d'un ensemble F et d'un procédé qui permet d'associer à un élément x de E au plus un élément $y = f(x)$ de F. Cet élément y, quand il existe, est l'image de x, et x est appelé un antécédent de y. On appelle E l'ensemble de départ de f, F l'ensemble d'arrivée de f.

Remarque 1. Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un élément.

1.2 L'ensemble de définition d'une fonction

Définition 2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x.

L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des nombres réels x qui possèdent une image par cette fonction. L'ensemble de définition de la fonction f est noté : D_f tel que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 1. Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} \ , \ f(x) = \sqrt{x-1} \ , \ f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1} \ , \ f(x) = \frac{1}{2x^2+x-3}$$

1. On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1, +\infty[$.

3. On a

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+1) \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0 \ et \ \ x+1 \neq 0 \ \right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \ et \ \ x \neq -1 \ \right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

4. On a $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + x - 3 \neq 0\right\}$, comme le discriminant de l'équation $2x^2 + x - 3 = 0$ est $\triangle = 25$ donc les deux solutions de l'équation sont : $\dfrac{-3}{2}$ et 1, par suite

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-3}{2}, 1\right\}.$$

Remarque 2. Une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$.

1.3 Graphe d'une fonction

Définition 3. La courbe représentative d'une fonction f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ ou x parcourt le domaine de définition D_f de f, elle est souvent notée (C_f).

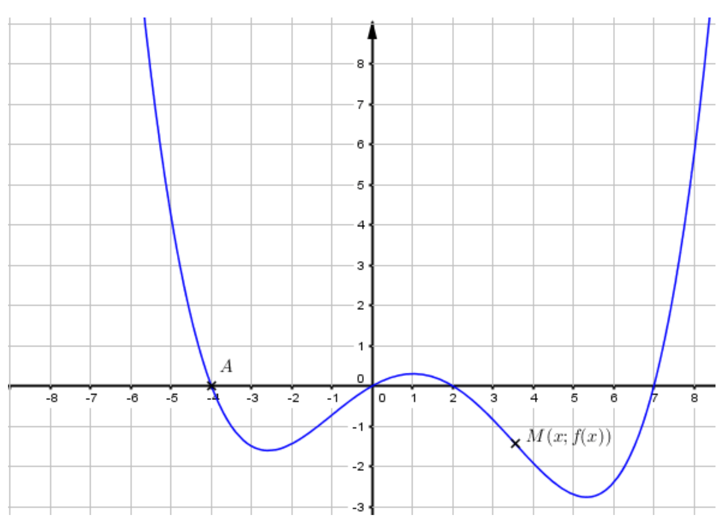

FIGURE 1 –

Remarque 3. La définition signifie : $M(x, y) \in (C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ \\ x \in D_f \end{cases}$.

1.4 Égalité de deux fonctions

Définition 4. Deux fonctions f et g sont dites égales si :

1. Elles sont le même ensemble de définition D.
2. $(\forall x \in D), f(x) = g(x)$.

Exemple 2. :

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x-7}$ et la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x-14}{x-7}$. On a

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \backslash \{7\}.$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{7\}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - \frac{x}{x-7} \\ &= \frac{2(x-7)}{x-7} - \frac{x}{x-7} \\ &= \frac{2x - 14 - x}{x-7} \\ &= \frac{x-14}{x-7} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

   donc les fonctions f et g sont égales.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ et la fonction g définie par : $g(x) = x - 1$. On a $D_g = \mathbb{R}$ (car g est une fonction polynôme) et $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$. Ainsi

$$D_f \neq D_g$$

   donc $f \neq g$.

2 Variation d'une fonction

Dans cette partie on considère une fonction f définie sur un intervalle I ainsi qu'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Définition 5. :

1. La fonction f est dite croissante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de l'intervalle I tels que $a \leq b$ on a $f(a) \leq f(b)$.

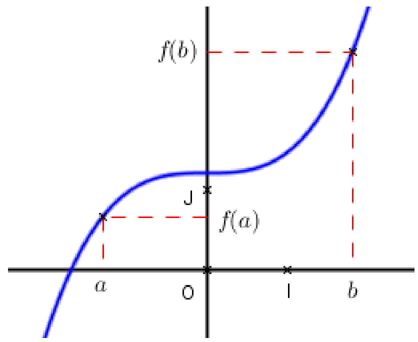

FIGURE 2 –

2. La fonction f est dite décroissante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de l'intervalle I tels que $a \leq b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

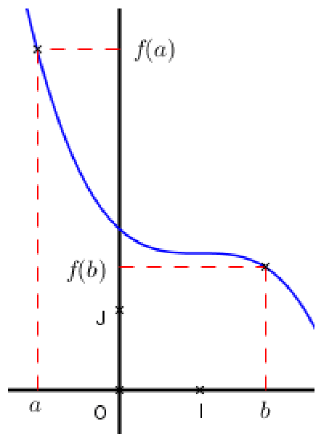

FIGURE 3 –

3. La fonction f est dite constante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de l'intervalle I on a $f(a) = f(b)$.

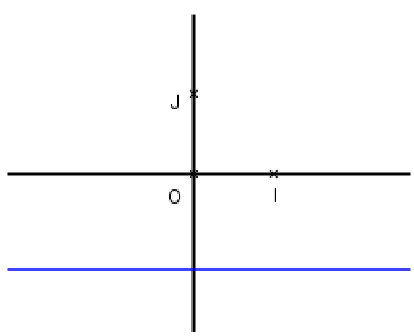

FIGURE 4 –

Remarque 4. On parle souvent de fonction strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur un intervalle I. Cela signifie que pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$ on a $f(a) < f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$). On interdit donc que la fonction soit constante sur une partie de l'intervalle.

On synthétise les différentes variations d'une fonction sur son ensemble de définition à l'aide d'un tableau de variations.

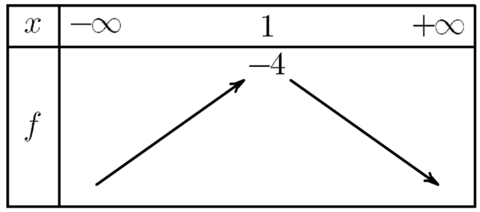

FIGURE 5 –

Ce tableau nous fournit plusieurs informations :

Exemple 3.
— L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
— La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$
— La fonction f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$
— $f(1) = -4$.

Par convention, on symbolisera la croissance d'une fonction sur un intervalle par une flèche "montante" et la décroissance par une flèche "descendante". Dans la mesure du possible, on indique également les images des bornes des différents intervalles sur lesquels la fonction f change de variations.

Définition 6. On dit qu'une fonction f est strictement monotone sur un intervalle I si elle soit strictement croissante soit strictement décroissante sur l'intervalle I.

Remarque 5. Pour montrer la monotonie d'une fonction sur I, on prendra deux réels $a, b \in I$ tel que $a < b$ et l'on étudiera le signe de $f(a) - f(b)$. Si le signe est positif la fonction est décroissante, si le signe est négatif la fonction est croissante.

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalles $]-1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$.

— Soit a et b deux éléments de $]-1, +\infty[$ tels que : $a < b$. On a

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \\ &= \frac{b+1-(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{b+1-a-1}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \end{aligned}$$

on a : $a > -1$ et $b > -1$ alors $\begin{cases} a+1>0 \\ \\ b+1>0 \end{cases}$ donc $(a+1)(b+1)>0$ et comme $a<b$ donc $b-a>0$, par suite $\dfrac{b-a}{(a+1)(b+1)}>0$ c'est-à-dire $f(a)-f(b)>0$, d'ou la fonction f est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$.

— Soit a et b deux éléments de $]-\infty,-1[$ tels que : $a<b$. On a

$$f(a)-f(b)=\frac{b-a}{(a+1)(b+1)}$$

on a : $a < -1$ et $b < -1$ alors $\begin{cases} a+1<0 \\ \\ b+1<0 \end{cases}$ donc $(a+1)(b+1)>0$ et comme $a<b$ donc $b-a>0$, par suite $\dfrac{b-a}{(a+1)(b+1)}>0$ c'est-à-dire $f(a)-f(b)>0$, d'ou la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$.

3 Extremum d'une fonction

Définition 7. On dit que la fonction f admet un extremum sur l'intervalle I, si elle possède un minimum ou un maximum sur cet intervalle.

.

Définition 8. :

1. On dit que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle I en a si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leq f(a)$.

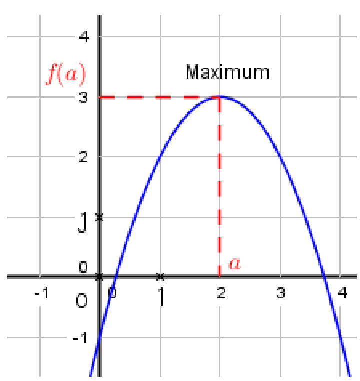

FIGURE 6 –

2. On dit que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle I en a si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geq f(a)$.

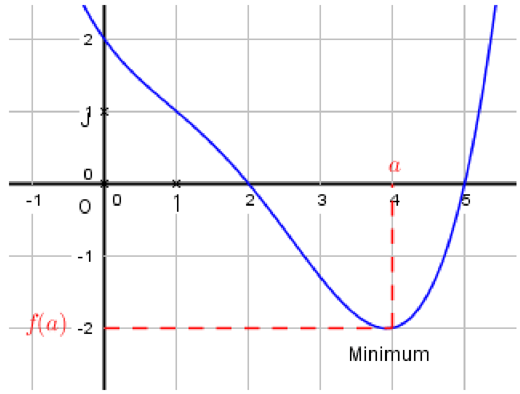

FIGURE 7 –

4 Fonctions de référence

Dans ce paragraphe, les propositions ont été formulées sans justification.

4.1 Fonction affine

Proposition 1. *Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$.*

1. *Si $a > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si $a = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.*
3. *Si $a < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*

4.2 Fonction carré

Proposition 2. *La fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 8 –

4.3 Fonction inverse

Proposition 3. *La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.*

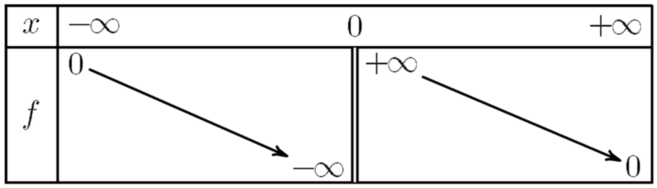

Figure 9 –

4.4 Fonction racine carrée

Proposition 4. *La fonction racine carrée* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.

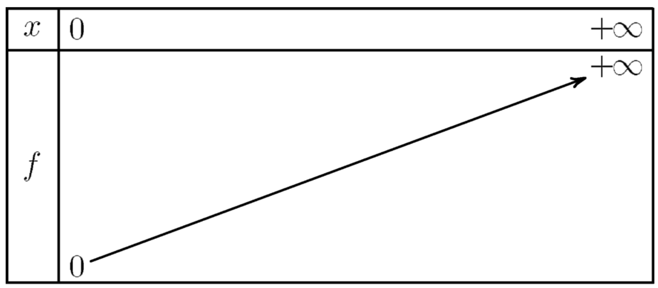

Figure 10 –

4.5 Fonction cube

Proposition 5. *La fonction cube* $x \mapsto x^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

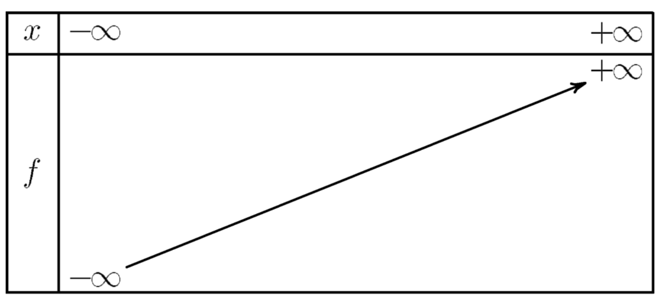

Figure 11 –

4.6 Fonction valeur absolue

4.6.1 Définition

Définition 9. La valeur absolue d'un réel x, est le nombre noté $|x|$ tel que :

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

Exemple 5. On a $|-5| = 5$ et $|21| = 21$.

Proposition 6. *La fonction valeur absolue possède les propriétés suivantes :*

1. $|x-a|$ *représente la distance de* x *au nombre* a.
2. *On a :* $(\forall x \in \mathbb{R}), \sqrt{x^2} = |x|$.
3. *Deux nombres opposés ont même valeur absolue :* $(\forall x \in \mathbb{R}), |-x| = |x|$ *.On dit que la fonction valeur absolue est* *<u>paire</u>.*
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \quad oux = -y$.
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(<u>L'inégalité triangulaire</u>).*
6. *On peut exprimer un intervalle à l'aide d'une valeur absolue, avec* $r > 0$ *:*

$$|x-a| < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$$

Exemple 6. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $]2x-2[= |3-x|$.

On a

$$]2x-2[= |3-x| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 = 3-x \\ ou \\ 2x-2 = -(3-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+x = 2+3 \\ ou \\ 2x-2 = -3+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5 \\ ou \\ x = -3+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ ou \\ x = -1 \end{cases}$$

donc $S = \left\{-1, \dfrac{5}{3}\right\}$.

4.6.2 Variation

La fonction valeur absolue est une fonction affine définie par morceaux. Sa représentation est alors deux demi-droite.

— Si $x \geq 0$, $|x| = x$ alors la fonction est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
— Si $x \leq 0$, $|x| = -x$ alors la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

5 Fonctions paires et impaires

Définition 10. On considère une fonction f définie sur un ensemble I.

1. On dit que la fonction f est paire si, pour tout $x \in I$, on a $\begin{cases} -x \in I \\ \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.
2. On dit que la fonction f est impaire si, pour tout $x \in I$, on a $\begin{cases} -x \in I \\ \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Proposition 7. :

1. *Si une fonction est paire alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour sa représentation graphique.*
2. *Si une fonction est impaire alors l'origine du repère est un centre de symétrie pour sa représentation graphique.*

Démonstration. Admis

□

FIN