Chapitre 04 : Fonction Exponentielle

Première Spé

Yahya MATIOUI

16 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et théorèmes

Théorème 1. *Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

Démonstration. L'existence de cette fonction est admise.

Montrons que cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est unique.

–La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

□

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x) f(-x)$.

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) \\ &\underset{f=f'}{=} f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

et comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

On en déduit alors $f(x) \times f'(-x) = 1$, donc la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

– Unicité de la fonction exponentielle

On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions :

$$\begin{cases} f = f' & f(0) = 1 \\ \\ g = g' & g(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $h = \dfrac{f}{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ car g ne s'annule pas. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables :

$$h' = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2} = \frac{f \times g - f \times g}{g^2} = 0$$

La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$. Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

On en déduit que $f = g$. L'unicité de f est donc vérifiée.

Définition 1. On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et on la note : exp.

Corollaire 1. $exp(0) = 1$.

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Dérivabilité

Proposition 1. *La fonction exponentielle est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$(exp(x))' = exp(x).$$

Démonstration. Conséquence immédiate de sa définition. □

2.2 Variations

Proposition 2. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On a démontré dans le paragraphe 1 que la fonction exponentielle ne s'annule jamais. Or, par définition $exp(0) = 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) > 0$. Comme $(exp(x))' = exp(x)$, la fonction exponentielle est strictement croissante. □

Proposition 3. *Pour tout réels a et b, on a :*

1. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
2. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
3. $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Démonstration. Admis

□

Exemple 1. .

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

$$e^{2x^2+3} = e^{7x} \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 7x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

et comme $\triangle = 49 - 25 = 24 > 0$ l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{7+5}{4} = 3$ et $x_2 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ donc

$$S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{3x} \leq e^{x+6}$

$$e^{3x} \leq e^{x+6} \Leftrightarrow 3x \leq x + 6 \Leftrightarrow 3x - x \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

donc $S =]-\infty, 3]$.

2.3 Limites en l'infini

Proposition 4. $\lim\limits_{x \to -\infty} exp\,(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} exp\,(x) = +\infty$.

<u>Propriété démontrée au paragraphe III</u>

2.4 Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(expx)'$		$+$	
$expx$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

Figure 1 –

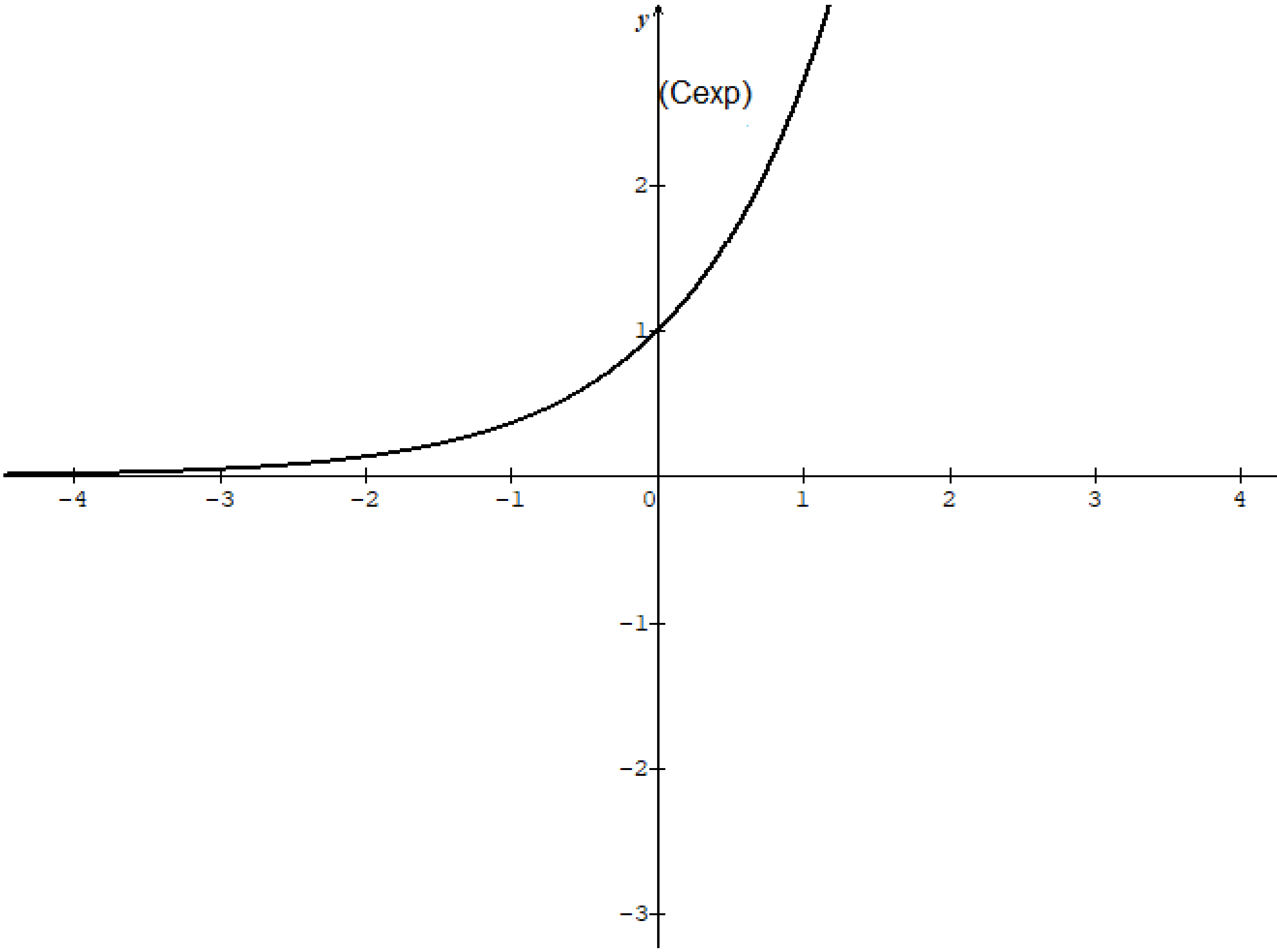

FIGURE 2 –

3 Propriété de la fonction exponentielle

3.1 Relation fonctionnelle

Théorème 2. *Pour tous réels x et y, on a : $exp\left(x+y\right)=exp\left(x\right)\times exp\left(y\right)$.*

Remarque 1. La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Démonstration. Comme $exp\left(x\right)\neq 0$, on pose $f\left(x\right)=\dfrac{exp\left(x+y\right)}{exp\left(x\right)}$ avec $y\in\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f'\left(x\right)=\frac{exp\left(x+y\right)\times exp\left(x\right)-exp\left(x+y\right)\times exp\left(x\right)}{\left(exp\left(x\right)\right)^{2}}=0.$$

Donc la fonction f est constante. Comme $f\left(0\right)=\dfrac{exp\left(y\right)}{exp\left(0\right)}=exp\left(y\right)$, on en déduit que $\dfrac{exp\,(x+y)}{exp\,(x)} = exp\,(y)$ c'est-à-dire $exp\,(x+y) = exp\,(x) \times exp\,(y)$.

□

Corollaire 2. *Pour tous réels x et y, on a :*

1. $exp\,(-x) = \dfrac{1}{exp\,(x)}$
2. $exp\,(x-y) = \dfrac{exp\,(x)}{exp\,(y)}$
3. $exp\,(nx) = (exp\,(x))^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. .

–$exp\,(x) \times exp\,(-x) = exp\,(x-x) = exp\,(0) = 1$, donc $exp\,(-x) = \dfrac{1}{exp\,(x)}$.

–On a

$$\begin{aligned} exp\,(x-y) &= exp\,(x+(-y)) \\ &= exp\,(x) \times exp\,(-y) \\ &= exp\,(x) \times \frac{1}{exp\,(y)} \\ &= \frac{exp\,(x)}{exp\,(y)} \end{aligned}$$

–Raisonnement de proche en proche à l'aide de la relation fonctionnelle.

□

3.2 Le nombre e

Définition 2. L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $exp\,(1) = e$.

Remarque 2. Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e. $2,718281828$

Notation Nouvelle : $exp\,(x) = exp\,(x \times 1) = (exp\,(1))^x = e^x$

On note $(\forall x \in \mathbb{R})\,, exp\,(x) = e^x$.

Proposition 5. *Pour tous réels x et y on a :*

1. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
2. $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$
3. $e^{x+y} = e^x \times e^y$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $(e^{nx}) = (e^x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstration. <u>Démontrons la propriété $4^{éme}$</u>.

Démontrons d'abord le résultat suivant : $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x$.

Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = e^x - x$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = e^x - 1$.

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

et : $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

De même on a $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$

FIGURE 3 –

Alors pour tout réel x on a $f(x) \geq 1$ par suite $f(x) > 0$ c'est-à-dire

$$(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x.$$

Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

<u>Démontrons que :</u> $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

On a $e^x = e^{-(-x)} = \dfrac{1}{e^{-x}}$

On pose $X = -x$ $(x \to -\infty \Rightarrow X \to +\infty)$ donc

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$$

et comme $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ alors $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

$\square$

Exemple 2. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}, B = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}.$$

— $A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^3}{e^{-5}} = e^{3+5} = e^8$.

— On a

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^2 \times e^{-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{2-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + e^{-4+4} \\ &= e^6 + e^0 \\ &= e^6 + 1 \end{aligned}$$

4 Limites et croissances comparées

Proposition 6. .

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *et pour tout entier naturel n,* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ *et pour tout entier naturel n,* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration. .

–On a $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x$. En particulier, pour tout $x \in]0, +\infty[, (e^x)^2 > x^2$ donc

$$(\forall x \in]0, +\infty[), \frac{e^{2x}}{x} > x.$$

Posons $X = 2x$ donc $(\forall X \in]0, +\infty[), \dfrac{e^X}{X} > \dfrac{X}{4}$.

Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{4} = +\infty$ alors $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

Dans le cas général, montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

On a $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.

On pose $X = \dfrac{x}{n}$ alors $(x \to +\infty \Rightarrow X \to +\infty)$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

– Posons $X = -x$ alors

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-X)^n \times e^{-X} \\ &= (-1)^n \times \frac{X^n}{e^X} \\ &= (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \end{aligned}$$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} = 0.$ $\displaystyle\left(\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty\right)$.

□

Proposition 7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration. Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

□

Exemple 3. Calculer les limites suivantes :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x + e^{-4x}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$.

— On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x + e^{-4x} = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{e^{4x}}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{4x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{4x}} = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{e^x} = +\infty$. D'ou

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x + e^{-4x}\right) = +\infty$$

— On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^1$.

— On a $\underset{x\to+\infty}{lim}\dfrac{e^x+x}{e^x-x^2}=\underset{x\to+\infty}{lim}\dfrac{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{x^2}{e^x}\right)}=\underset{x\to+\infty}{lim}\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{x^2}{e^x}}$ et comme

$$\underset{x\to+\infty}{lim}\frac{x}{e^x}=\underset{x\to+\infty}{lim}\frac{x^2}{e^x}=0$$

alors $\underset{x\to+\infty}{lim}\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{x^2}{e^x}}=1$ c'est-à-dire

$$\underset{x\to+\infty}{lim}\frac{e^x+x}{e^x-x^2}=1.$$

5 Fonctions de la forme e^u

Proposition 8. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.*

La fonction $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x\mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$.

Démonstration. Admis.

□

Exemple 4. Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x-1}$ et $g(x)=e^{-x^2}$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=2e^{2x-1}$ et $g'(x)=-2xe^{-x^2}$.

Proposition 9. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les fonctions $x\mapsto u(x)$ et $x\mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.*

Démonstration. On a $(e^u)'=u'\times e^u$, et comme $e^u>0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe.

□

Exemple 5. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

Étudier une fonction

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xe^{\frac{-x}{2}}$.

1. Calculer $\underset{x\to+\infty}{lim}f(x)$ et $\underset{x\to-\infty}{lim}f(x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

— On a $\underset{x\to-\infty}{lim}\frac{-x}{2}=+\infty$ alors $\underset{X\to+\infty}{lim}e^{X}=+\infty$ et comme $\underset{x\to-\infty}{lim}x=-\infty$ donc $\underset{x\to-\infty}{lim}xe^{\frac{-x}{2}}=-\infty$ c'est-à-dire

$$\underset{x\to-\infty}{lim}f(x)=-\infty$$

On a

$$\begin{aligned}\underset{x\to+\infty}{lim}f(x)&=\underset{x\to+\infty}{lim}x\times e^{\frac{-x}{2}}\\&=\underset{x\to+\infty}{lim}2\times\frac{x}{2}\times e^{\frac{-x}{2}}\\&=\underset{x\to+\infty}{lim}2\times\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\end{aligned}$$

et comme $\underset{x\to+\infty}{lim}\frac{x}{2}=+\infty$ alors $\underset{X\to+\infty}{lim}\frac{X}{e^{X}}=0$ donc $\underset{x\to+\infty}{lim}2\times\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}=0$ c'est-à-dire

$$\underset{x\to+\infty}{lim}f(x)=0.$$

— La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(xe^{\frac{-x}{2}}\right)'\\&=e^{\frac{-x}{2}}+x\times\left(\frac{-1}{2}\right)\times e^{\frac{-x}{2}}\\&=e^{\frac{-x}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

et comme $(\forall x\in\mathbb{R}),e^{\frac{-x}{2}}>0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(1-\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

$$1-\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow x=2$$

et comme $a=\frac{-1}{2}<0$ donc on déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

FIGURE 4 –

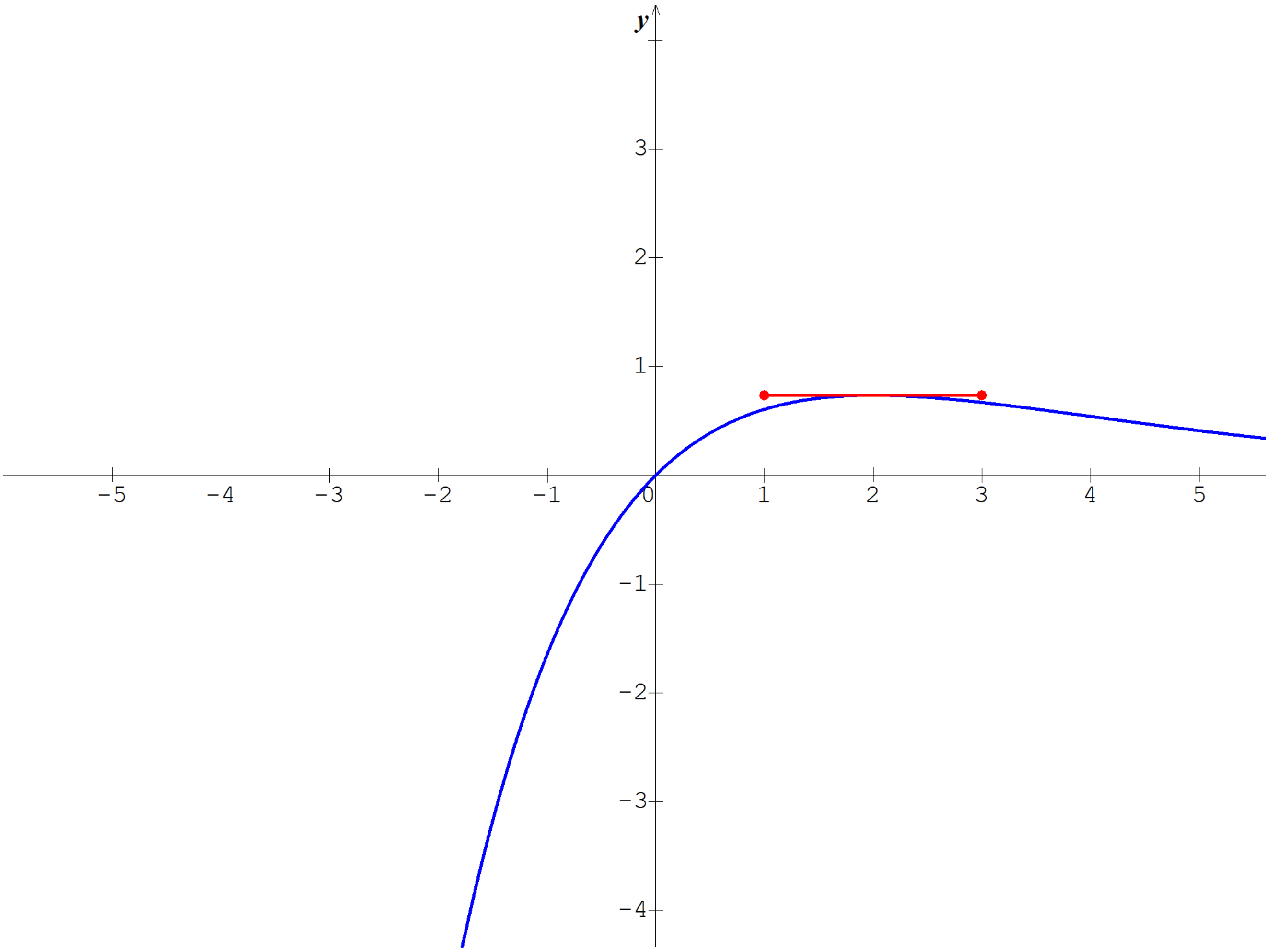

FIGURE 5 –

—

FIN