Chapitre 04 : Dérivation

Première Spé

Yahya MATIOUI

10 juillet 2023

www.etude-generale.com

1 Limite en zéro d'une fonction

1.1 L'étude d'un exemple

1. Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$$

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	...	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	$0{,}5$
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

FIGURE 1 –

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

Définition 1.1. On dit que f a pour limite ℓ lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0. On note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ et on lit : la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à ℓ.

1.2 Quelques Résultats A Connaître

Remarque 1.1. On admet que si une fonction f est définie en 0 et si f admet une limite finie en 0 (on dit que f est continue en 0), alors : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée ...

- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0, alors : $\lim\limits_{x \to 0} P(x) = P(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0} Q(x) = Q(0)$.
- Si de plus, P et Q sont définies et positives au voisinage de 0, alors :

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}\ , \lim_{x \to 0} \sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}.$$

- Soit f et g deux fonctions telles que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell'$, alors : $\lim\limits_{x \to 0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$ et $\lim\limits_{x \to 0} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$.

2 Nombre dérivé

2.1 Définition et Exemples

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition 2.1. Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel ℓ, revient à dire que le taux de variation de f en a, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, admet pour limite finie ℓ quand h tend vers 0. Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Exemple 2.1. Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Démontrer que f est dérivable en $x_0 = 2$.

On commence par calculer $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$: On a

$$
\begin{aligned}
\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-\left(2^2+2\times 2-3\right)}{h}\\
&= \frac{\left(4+4h+h^2\right)+4+2h-3-5}{h}\\
&= \frac{4+4h+h^2+2h-4}{h}\\
&= \frac{6h+h^2}{h}\\
&= \frac{h(6+h)}{h}\\
&= 6+h
\end{aligned}
$$

et comme $\underset{h\to 0}{lim} 6+h=6+0=6$ alors $\underset{h\to 0}{lim}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$. On en déduit que f est dérivable en $x_0=2$, le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2)=6$.

Remarque 2.1. La notation $h\to 0$ signifie que h tend vers zéro sans l'atteindre ($h\neq 0$).

Exemple 2.2. (cas de la fonction valeur absolue)

La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x|$.

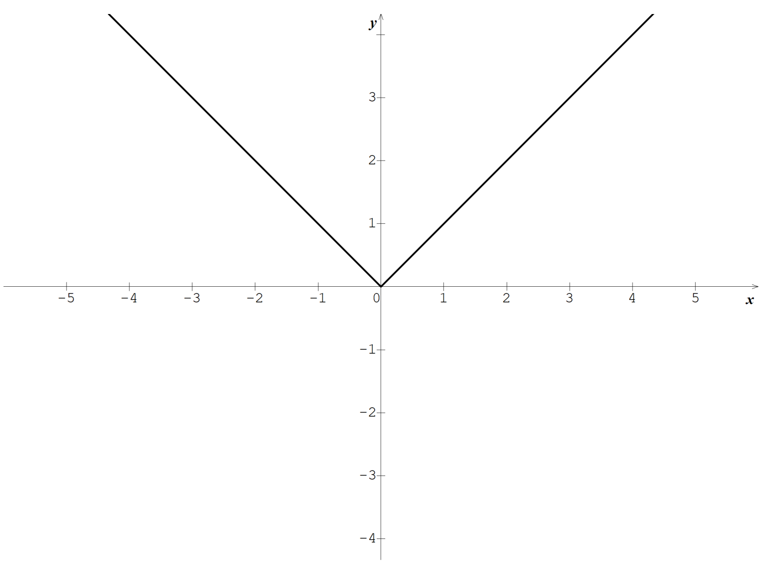


Figure 2 – $f(x)=|x|$

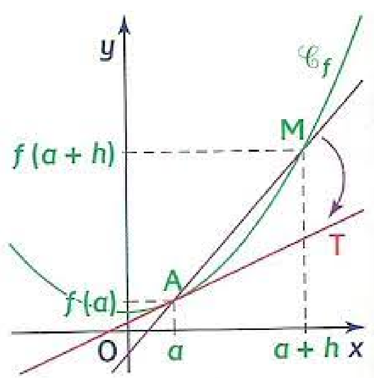
On a $\begin{cases} |x|=x & ,x\geq 0\\ |x|=-x & ,x\leq 0\end{cases}$. La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. On calcule le taux de variation de f en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{|0+h|-|0|}{h} \\ &= \frac{|h|}{h} \\ &= \begin{cases} \dfrac{h}{h}=1 & ,h>0 \\ \\ \dfrac{-h}{h}=-1 & ,h<0 \end{cases}\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de h. La limite ne peut pas être égal à la fois à 1 et à -1. Ceci signifie que la fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

2.2 Tangente en un point



Soit M le point de (C_f) d'abscisse $a+h$. Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Géométriquement, la tangente à (C_f) au point A se concoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe. Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficients directeur $f'(a)$ et passe par A.

Proposition 2.1. *Si f est dérivable en a, la courbe (C_f) admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$. Une équation de la tangente en ce point est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.*

Démonstration. Admis

□

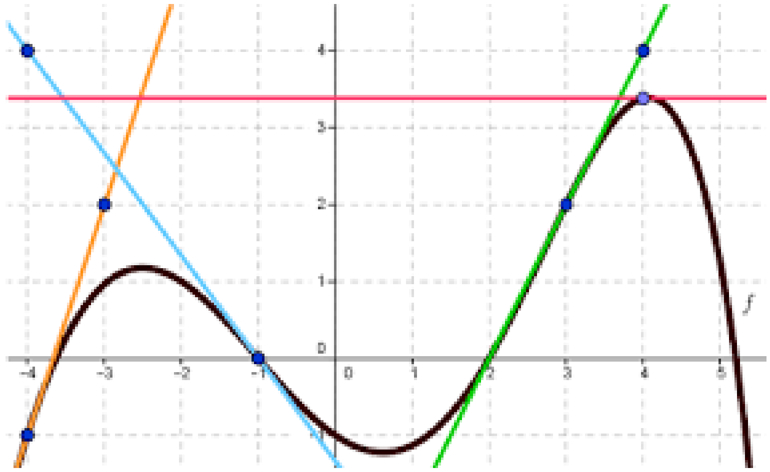


FIGURE 3 –

Exemple 2.3. On donne la courbe (C_f) d'une fonction f. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction f admet donc les nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants : $f'(4)$, $f'(3)$, $f'(-4)$ et $f'(-1)$. On a $\begin{cases} f'(4) = 0 \\ \\ f'(3) = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} f'(-4) = \dfrac{3}{1} = 3 \\ \\ f'(-1) = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Remarque 2.2. Si $f'(a) = 0$, (C_f) admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = f(a)$.

Exemple 2.4. On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 2.$$

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse $x_0 = 1$.

— Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Calculons $f(1)$: On a $f(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 2 = -2$.

— On commence par calculer le nombre dérivé en 1, $f'(1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2-5(1+h)+2-\left(1^2-5\times 1+2\right)}{h} \\
&= \frac{\left(1+2h+h^2\right)-5-5h+2+2}{h} \\
&= \frac{h^2+2h-5h+1-5+4}{h} \\
&= \frac{h^2-3h-4+4}{h} \\
&= \frac{h^2-3h}{h} \\
&= \frac{h(h-3)}{h} \\
&= h-3
\end{aligned}$$

et comme $\underset{h\to 0}{lim} h-3=-3$ alors $\underset{h\to 0}{lim}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-3$. Donc la fonction f est dérivable en $x_0=1$ et on a $f'(1)=-3$.

— Une équation de la tangente en 1 est donc de la forme :

$$\begin{aligned}
y &= -3(x-1)+(-2) \\
&= -3x+3-2 \\
&= -3x+1
\end{aligned}$$

donc une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 1 est $(T): y=-3x+1$.

3 Dérivées des fonctions usuelles

3.1 Fonction dérivée

Définition 3.1. Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Si la fonction f admet un nombre dérivé en tout point de I, on dit que la fonction f est dérivable sur I. La fonction, notée f', définie sur I qui a tout x associe son nombre dérivé est appelée fonction dérivée de f.

Remarque 3.1. Le but du paragraphe suivant est de déterminer les fonctions dérivées des fonctions élémentaires puis d'établir des règles opératoires afin de pouvoir déterminer la dérivée d'une fonction quelconque.

3.2 Fonction dérivée des fonctions élémentaires

3.2.1 Fonction affine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$. Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = a.$$

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en α (nombre réel quelconque) pour $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} &= \frac{a(\alpha+h) + b - (a\alpha + b)}{h} \\
&= \frac{a\alpha + ah + b - a\alpha - b}{h} \\
&= \frac{ah}{h} \\
&= a
\end{aligned}$$

on passe à la limite : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} a = a$. Pour tout nombre a, associe le nombre dérivé de la fonction f égal à a. On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = a$. Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

3.2.2 Fonction carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Démontrons que pour tout x réel, on a

$$f'(x) = 2x.$$

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en a (nombre réel quelconque) . Pour $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{2ah + h^2}{h} \\
&= \frac{h(2a+h)}{h} \\
&= 2a + h
\end{aligned}$$

on passe à la limite : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}2a+h=2a$. Pour tout nombre a, associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$. On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x)=2x$.

3.2.3 Fonction puissance

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$. Démontrons que pour tout x réel, on a

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en a (nombre réel quelconque). Pour $h\neq0$, on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^n-a^n}{h}$$

On a $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}a^{n-k}b^k$ donc

$$\begin{aligned}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}&=\frac{a^n+\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}a^{n-1}h+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}a^{n-2}h^2+\ldots+h^n-a^n}{h}\\&=\frac{na^{n-1}h+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}a^{n-2}h^2+\ldots+h^n}{h}\\&=\frac{h\left(na^{n-1}+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}a^{n-2}h+...+h^{n-1}\right)}{h}\\&=na^{n-1}+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}a^{n-2}h+...+h^{n-1}\end{aligned}$$

par suite $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}na^{n-1}+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}a^{n-2}h+...+h^{n-1}=na^{n-1}$. Pour tout nombre a, associe le nombre dérivé de la fonction f égal à na^{n-1}. On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x)=nx^{n-1}$.

3.2.4 Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}.$$

Pour $h \neq 0$ et $a \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\
&= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\
&= \frac{a-(a+h)}{ah(a+h)} \\
&= \frac{-h}{ah(a+h)} \\
&= \frac{-1}{a(a+h)}
\end{aligned}$$

on a : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$. Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $\frac{-1}{a^2}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

3.2.5 Fonction racine

La fonction racine est définie mais pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 et donc l'équation de la tangente en 0 n'admet pas de coefficient directeur.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$. Démontrons que pour tout x de $]0, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Soit h et a deux éléments de $]0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

donc : $\underset{h\to 0}{lim}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \underset{h\to 0}{lim}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Ainsi pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.2.6 Conclusion

Tableau des dérivées des fonctions élémentaires et sinus, cosinus :

Fonction	D_f	Dérivée	$D_{f'}$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$f(x) = sinx$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = cosx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cosx$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -sinx$	$\mathbb{R}$

Exemple 3.1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$f(x) = 100$, $g(x) = -5x$, $h(x) = x^4$, $k(x) = \frac{1}{x^5}$ et $M(x) = \sqrt{x}$.

- $f'(x) = 0$
- $g'(x) = -5$
- $h'(x) = 4x^3$

— $k'(x) = -\dfrac{5}{x^6}$
— $M'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4 Opérations sur les fonctions dérivées

4.1 Opérations sur les fonctions dérivées

Proposition 4.1. *Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel alors on a :*

1. *La fonction $u+v$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(u+v)' = u' + v'$.*
2. *La fonction λu est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $(\lambda u)' = \lambda u'$.*
3. *La fonction $u \times v$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$.*
4. *Si de plus $v(x) \neq 0$ pour tout réel x de I, alors :*

— *La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.*
— *La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$*

Démonstration. .
– Soit $a \in I$, pour $h \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)+v(a+h)-v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$

et comme $\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)\\ \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)\end{cases}$ par suite

$$\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a)$$

Ainsi $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$ pour tout $a \in I$.

$$(u+v)' = u' + v'$$

– Soit $a \in I$, pour $h \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda u)(a+h) - (\lambda u)(a)}{h} &= \frac{\lambda \times (u(a+h)) - \lambda \times (u(a))}{h} \\ &= \frac{\lambda (u(a+h) - u(a))}{h} \\ &= \lambda \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\lambda u)(a+h) - (\lambda u)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \lambda \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = \lambda \times u'(a).$$

Ainsi $\lambda \times u$ est dérivable en a et $(\lambda \times u)'(a) = \lambda \times u'(a)$ pour tout $a \in I$.

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

–La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif. Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{(u \times v)(a+h) - (u \times v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\ &= \frac{(u(a+h) - u(a)) \times v(a+h) + u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\ &= \frac{(u(a+h) - u(a)) \times v(a+h)}{h} + \frac{u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on a : $\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a) \\ \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a) \end{cases}$

et $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$ donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{(u \times v)(a+h) - (u \times v)(a)}{h} = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$$

Ainsi $u \times v$ est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$ pour tout $a \in I$.

$$(uv) = u'v + uv'$$

–La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux de variation de $\frac{1}{v}$ pour $h \neq 0$ et $v(a) \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} &= \frac{\frac{v(a) - v(a+h)}{v(a+h) \times v(a)}}{h} \\
&= \frac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a+h) \times v(a)} \\
&= \frac{v(a) - v(a+h)}{h} \times \frac{1}{v(a+h) \times v(a)}
\end{aligned}$$

on passe à la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v(a) - v(a+h)}{h} \times \frac{1}{v(a+h) \times v(a)}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{v(a) - v(a+h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{-(v(a+h) - v(a))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} - \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} - \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\
&= -v'(a)
\end{aligned}$$

et : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{v(a+h) \times v(a)} = \frac{1}{v^2(a)}$ donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(a) - v(a+h)}{h} \times \frac{1}{v(a+h) \times v(a)} = \frac{-v'(a)}{v^2(a)}$$

Ainsi $\frac{1}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = \frac{v'(a)}{v^2(a)}$ pour tout $a \in I$.

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

– D'après la règle du produit, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)' \\
&= u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' \\
&= u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{-v'}{v^2}\right) \\
&= \frac{u'v - uv'}{v^2}
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemple 4.1. Calculer la fonction dérivée de f :

1. $f(x) = 4x^2 + 4\sqrt{x}$
2. $f(x) = 5x^4 - 2x^2$
3. $f(x) = \left(4x^2 + 5x\right)(5x - 1)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 5x}$
5. $f(x) = \dfrac{6x - 5}{x^2 + 2x - 1}$

— On a $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x^2 \to u'(x) = 8x \\ \\ v(x) = 4\sqrt{x} \to v'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \end{cases}$

donc
$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 8x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

— On a $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 5x^4 \to u'(x) = 5 \times 4x^{4-1} = 20x^3 \\ \\ v(x) = -2x^2 \to v'(x) = -4x \end{cases}$

donc
$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 20x^3 - 4x.$$

— On a $f(x) = u(x) \times v(x)$avec $\begin{cases} u(x) = 4x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 8x + 5 \\ \\ v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5 \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= (8x + 5)(5x - 1) + 5\left(4x^2 + 5x\right) \\ &= 40x^2 - 8x + 25x - 5 + 20x^2 + 25x \\ &= 60x^2 + 42x - 5 \end{aligned}$$

— On a $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$ donc

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{4x + 5}{\left(2x^2 + 5x\right)^2}$$

— On a $f(x) = \dfrac{6x - 5}{x^2 + 2x - 1}$ avec $\begin{cases} u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6 \\ \\ v(x) = x^2 + 2x - 1 \rightarrow v'(x) = 2x + 2 \end{cases}$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{6\left(x^2 + 2x - 1\right) - (6x - 5)(2x + 2)}{\left(x^2 + 2x - 1\right)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 12x - 6 - \left(12x^2 + 12x - 10x - 10\right)}{\left(x^2 + 2x - 1\right)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 12x - 6 - \left(12x^2 + 2x - 10\right)}{\left(x^2 + 2x - 1\right)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 12x - 6 - 12x^2 - 2x + 10}{\left(x^2 + 2x - 1\right)^2} \\ &= \frac{-6x^2 + 10x + 4}{\left(x^2 + 2x - 1\right)^2} \end{aligned}$$

4.2 Dérivée de la puissance et de la racine

On donne sans démonstration la dérivée de la puissance et de la racine. Dans ce dernier cas, la fonction u doit être strictement positive sur I.

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple 4.2. Calculer les fonctions dérivés des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (7x+1)^4, g(x) = \sqrt{5x-4}$$

— On a $f(x) = (7x+1)^4$ avec $u(x) = 7x+1 \rightarrow u'(x) = 7$ et $n = 4$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \times u'(x) \times u^3(x) \\ &= 4 \times 7 \times (7x+1)^3 \\ &= 28(7x+1)^3 \end{aligned}$$

— On a $g(x) = \sqrt{5x-4}$ avec $v(x) = 5x-4 \rightarrow v'(x) = 5$ donc

$$g'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$$

4.3 Dérivée de la composée (hors programme)

On donne sans démonstration la dérivée de la composée.

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

Exemple 4.3. Soit $f(x) = sin\left(x^2+x-1\right)$ on a $f'(x) = (2x+1)\, cos\left(x^2+x-1\right)$.

Tableau récapitulatif

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de la composée	$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

4.4 Polynômes et fonctions rationnelles

Proposition 4.2. .

- Toute fonction polynôme est une somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple 4.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 2}$.

1. Montrer que f est dérivable sur D_f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

- f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.
- On applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et $\begin{cases} u(x) = x^3 - 2x \to u'(x) = 3x^2 - 2 \\ \\ v(x) = 2x^2 - 5x + 2 \to v'(x) = 4x - 5 \end{cases}$

  donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 2)(2x^2 - 5x + 2) - (x^3 - 2x)(4x - 5)}{(2x^2 - 5x + 2)^2} \\ &= \frac{6x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 4x^2 + 10x - 4 - (4x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x)}{(2x^2 - 5x + 1)^2} \\ &= \frac{6x^4 - 4x^4 - 15x^3 + 5x^3 + 6x^2 - 4x^2 + 8x^2 + 10x - 10x - 4}{(2x^2 - 5x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 4}{(2x^2 - 5x + 1)^2} \end{aligned}$$

  donc $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\right), f'(x) = \dfrac{2x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 4}{(2x^2 - 5x + 1)^2}$.

5 Application de la dérivation

5.1 Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Proposition 5.1. *Soit f une fonction dérivable sur I.*

- *f est croissante sur I si et seulement si $(\forall x \in I), f'(x) \geq 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $(\forall x \in I), f'(x) \leq 0$.*
- *f est constante sur I si et seulement si $(\forall x \in I), f'(x) = 0$.*

Exemple 5.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$. Donner le tableau de variation de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = 3\left(-x^2 + 2x + 3\right)$.

Donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe du trinôme $-x^2 + 2x + 3$. On a $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 > 0$ donc

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ ou \\ x = -1 \end{cases}$$

on déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	25	$\searrow$	$-\infty$

FIGURE 4 –

Remarque 5.1. .

- Si $f' \geq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' \leq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple 5.2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 1$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = 15\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = 15\left(x^2 - 1\right)^2$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) \geq 0$, comme la fonction f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois (f' s'annule uniquement en -1 et 1) alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5.2 Extremum d'une fonction

On rappelle qu'un extremum est un maximum ou un minimum

Proposition 5.2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.*

- *Si f admet extremum local au point c, alors $f'(c) = 0$.*
- *Si $c \in I$, $f'(c) = 0$ et si f' change signe en c alors f admet un extremum local en c sur I.*

Exemple 5.3. . Sur la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$, étudiée plus haut, la dérivée $f'(x) = 3\left(-x^2 + 2x + 3\right)$, s'annule en change de signe en -1 et 3. On en déduit que -7 et 25 sont des extremums.

Remarque 5.2. Si f' s'annule en c sans changer de signe, alors $f(c)$ n'est pas un extremum.

FIN