CORRECTION D'EXAMEN NATIONAL SN 2023

Yahya MATIOUI

26 juin 2023

www.etude-generale.com

Exercice 1. (3*points*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$

1.

a. Montrons que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{array}\right| \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \\
&= 8\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k} \\
&= 4\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)$

b. Déduisons l'aire du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$:

— On a $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{8^2+4^2+8^2} = \dfrac{12}{2} = 6$, donc $S_{ABC} = 6$.

— On a $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (AC) donc $d(B,(AC)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ et comme $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 12$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6$ par suite

$$d(B,(AC)) = \frac{12}{6} = 2$$

2. Soit D le milieu du segment $[AC]$

a. Vérifions que : $\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

On a : $D\begin{pmatrix} \frac{2}{2} \\ \frac{6}{2} \\ \frac{4}{2} \end{pmatrix}$ alors $D\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{D\Omega}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{D\Omega} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. D'autre part, on a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)$ par suite $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{D\Omega}$. Donc

$$\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).$$

b. Déduisons que : $d(\Omega,(ABC)) = 3$

On a $d(\Omega,(ABC)) = \Omega H$ avec H est le projeté orthogonale de Ω sur le plan (ABC), et comme $\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{D\Omega}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et on a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est un vecteur normal au plan (ABC) par suite $(D\Omega) \perp (ABC)$ et puisque $D \in (ABC)$ car D est le milieu du segment $[AC]$ alors D est le projeté orthogonale de Ω sur le plan (ABC) d'où $H = D$ donc $d(\Omega,(ABC)) = \Omega D$ donc

$$\begin{aligned} d(\Omega,(ABC)) &= \Omega D \\ &= \left\|\overrightarrow{\Omega D}\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{D\Omega}\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\| \\ &= \left\|2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right\| \\ &= \sqrt{4+1+4} = 3 \end{aligned}$$

donc $d(\Omega,(ABC)) = 3$

3. Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

a. Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S)

On a

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2-8y+16\right)+\left(z^2-8z+16\right) \\ &-9-16-16+32=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2-9=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=9 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=3^2 \end{aligned}$$

donc le centre de la sphère est $\Omega\,(3,4,4)$ et son rayon est $R=3$.

b. Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera

— On a $d\,(\Omega,(ABC))=3$ et comme $R=3$ donc $d\,(\Omega,(ABC))=R$ par suite le plan (ABC) est tangente à la sphère (S).

— On a $D\Omega=3=R$ donc $D\in(S)$ et on a $D\in(ABC)$ et puisque D est le milieu du segment $[AC]$ donc $(ABC)\bigcap(S)=\{D\}$. D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point D.

4. Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

Déterminons une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

On a $\overrightarrow{D\Omega}$ est un vecteur normal à chaque plan parallèle à (ABC), donc chaque plan parallèle à (ABC) à une équation de la forme

$$2x+y+2z+d=0.$$

Et comme $r=\sqrt{R^2-\left(d\,(\Omega,(Q))\right)^2}$ avec $\begin{cases} r=\sqrt{5} \\ \\ R=3 \end{cases}$ et (Q) l'un des deux plans parallèles au plan (ABC) tels que (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$. Donc

$$\left(d\,(\Omega,(Q))\right)^2=R^2-r^2=9-5=4$$

alors $d\left(\Omega,(Q)\right)=2$. D'où

$$\begin{aligned} d\left(\Omega,(Q)\right)=2 &\Leftrightarrow \frac{|6+4+8+d|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2\\ &\Leftrightarrow \frac{|18+d|}{\sqrt{9}}=2\\ &\Leftrightarrow \frac{|18+d|}{3}=2\\ &\Leftrightarrow |18+d|=6\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 18+d=6\\ ou\\ 18+d=-6 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d=-12\\ ou\\ d=-24 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\begin{cases} (Q_1) : 2x+y+2z-12=0\\ \\ (Q_2) : 2x+y+2y-24=0 \end{cases}$.

Exercice 2. $(3points)$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on considère les points A,B, C et D d'affixes respectives $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}+i$, $c=\overline{b}$ et $d=2i$

1. Ecrivons le nombre complexe a sous forme trigonométrique :

On a : $|a|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ donc

$$\begin{aligned} a&=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\\ &=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

2.

a. Vérifions que : $b-d=c$

On a

$$\begin{aligned} b-d &= 1+\sqrt{2}+i-2i \\ &= 1+\sqrt{2}-i \\ &= \left(\overline{1+\sqrt{2}+i}\right) \\ &= \overline{b} \\ &= c \end{aligned}$$

donc $b-d=c$.

b. Montrons que : $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$:

On a :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}+1\right)(b-a) &= \left(\sqrt{2}+1\right)\left(1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}+1\right)\left(1+i-i\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{2}+i\sqrt{2}-2i+1+i-i\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}-2i+1+i \\ &= \sqrt{2}-i+1 \\ &= 1+\sqrt{2}-i \\ &= \left(\overline{1+\sqrt{2}+i}\right) \\ &= c \\ &= b-d \end{aligned}$$

donc $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$

Déduisons que les points A,B et D sont alignés

On a $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$ donc $\dfrac{b-a}{b-d}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\in\mathbb{R}$ donc les points A,B et D sont alignés.

3.

a. Vérifions que : $ac=2b$

On a

$$\begin{aligned} ac &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}-i\right) \\ &= \sqrt{2}+2-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2i+\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}+2+2i \\ &= 2+2\sqrt{2}+2i \\ &= 2\left(1+\sqrt{2}+i\right) \\ &= 2b \end{aligned}$$

<u>donc $ac = 2b$</u>

b. <u>Déduisons que</u> : $2arg\,(b) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

On a : $ac = 2b$ donc

$$\begin{aligned} arg\,(ac) &\equiv arg\,(2b)\,[2\pi] \\ &\Leftrightarrow arg\,(a) + arg\,(c) \equiv arg\,(2) + arg\,(b)\,[2\pi] \\ &\Leftrightarrow arg\,(a) + arg\left(\overline{b}\right) \equiv arg\,(2) + arg\,(b)\,[2\pi] \\ &\Leftrightarrow arg\,(a) - arg\,(b) \equiv arg\,(2) + arg\,(b)\,[2\pi] \\ &\Leftrightarrow 2arg\,(b) \equiv arg\,(a) - arg\,(2)\,[2\pi] \end{aligned}$$

et comme $\begin{cases} arg\,(2) \equiv 0\,[2\pi] \\ \\ arg\,(a) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$ donc $2arg\,(b) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

a. <u>Montrons que</u> : $z' = \frac{1}{2}az$

On a

$$
\begin{aligned}
R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_O &= e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_0) \\
\Leftrightarrow z' &= e^{i\frac{\pi}{4}} z \\
\Leftrightarrow z' &= \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) z \\
\Leftrightarrow z' &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z \\
\Leftrightarrow z' &= \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})\, z}{2} \\
\Leftrightarrow z' &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) z \\
\Leftrightarrow z' &= \frac{1}{2} a z
\end{aligned}
$$

donc $z' = \frac{1}{2}az$

b. Déduisons que : $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

— On d'après l'expression complexe de la rotation R : $\frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \times 2b = b$, donc $R(C) = B$.

— On d'après l'expression complexe de la rotation R :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}aa &= \frac{1}{2}a^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \times 4i \\
&= 2i \\
&= d
\end{aligned}
$$

donc $R(A) = D$.

c. Montrons que : $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) a$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{c-a} &= \frac{1+\sqrt{2}+i-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}-i-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}\\
&= \frac{1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\\
&= \frac{1+i-i\sqrt{2}}{1-i-i\sqrt{2}}\\
&= \frac{\left(1+i-i\sqrt{2}\right)\left(1+\left(i+i\sqrt{2}\right)\right)}{\left(1-\left(i+i\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(i+i\sqrt{2}\right)\right)}\\
&= \frac{1+\left(i+i\sqrt{2}\right)+i+i\left(i+i\sqrt{2}\right)-i\sqrt{2}-i\sqrt{2}\left(i+i\sqrt{2}\right)}{1-\left(i+i\sqrt{2}\right)^2}\\
&= \frac{1+i+i\sqrt{2}+i-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{1-\left(-1-2\sqrt{2}-2\right)}\\
&= \frac{2i+2}{2+2\sqrt{2}+2}\\
&= \frac{1+i}{2+\sqrt{2}}\\
&= \frac{(1+i)\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\\
&= \frac{2-\sqrt{2}+2i-i\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{2+2i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

d'autre part, on a $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{2+2i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

donc

$$\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$$

Déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$

On a

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) &\equiv arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)[2\pi] \\ &\equiv arg\left(\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a\right)[2\pi] \\ &\equiv arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+arg\,(a)\,[2\pi]\end{aligned}$$

et comme $\begin{cases} arg\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\equiv 0\,[2\pi] \\ \\ arg\,(a)\equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]\end{cases}$ donc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Exercice 3. ($3 points$)

1.

a. Calculons $p\,(A)$:

Chaque tirage est constitué de 2 boules la première tirée dans l'urne U_1 et la deuxième dans l'urne U_2.

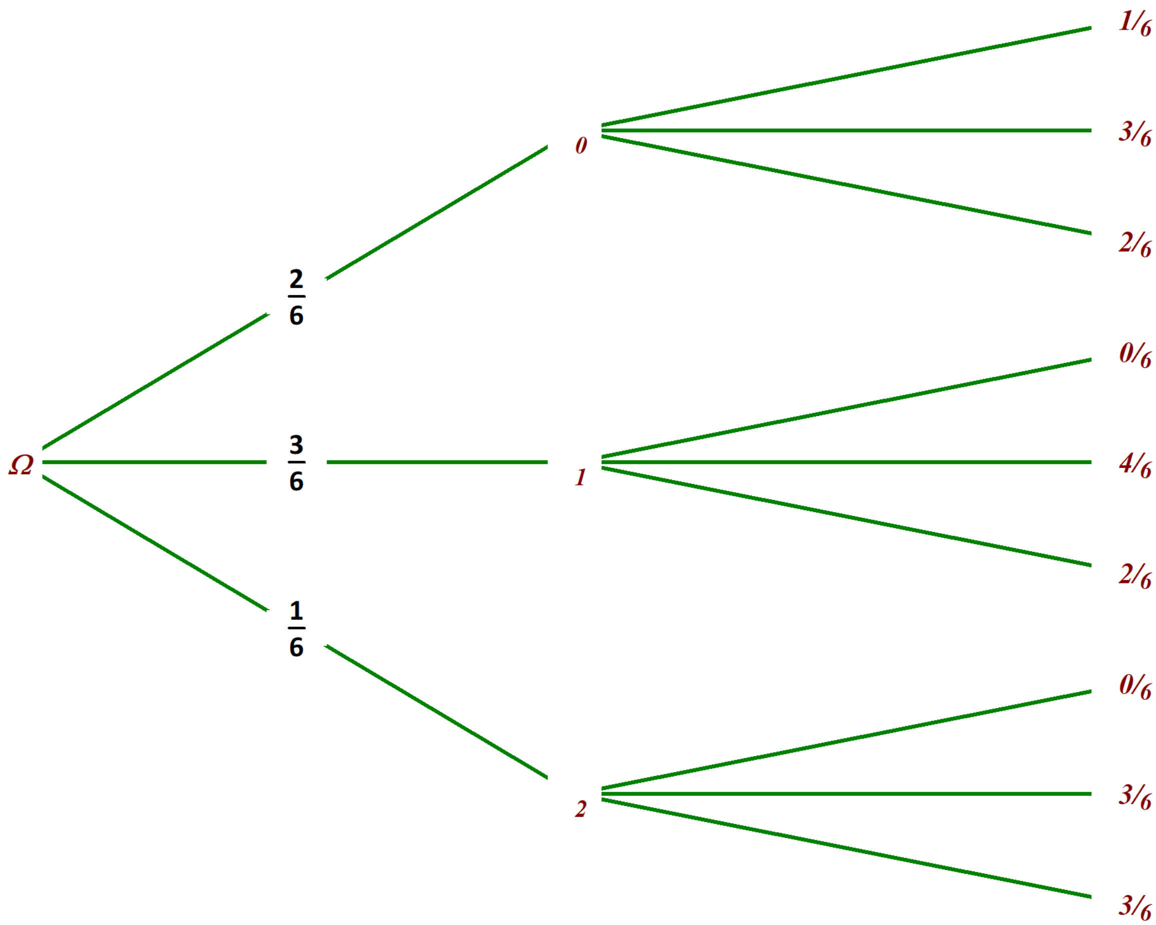

FIGURE 0.1 –

L'événement A : « la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 » c'est-à-dire $A : \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{pmatrix}$

donc

$$p\,(A) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

b. Montrons que : $p\,(B) = \dfrac{1}{4}$

L'événement B : « le produit ab est égal à 2 » c'est-à-dire B : $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $p\,(B) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

2. Calculons $p\,(A/B)$, probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

On a $p(A/B)=\dfrac{p(A\bigcap B)}{p(B)}$ et comme $A\bigcap B$: $\begin{pmatrix}1\\ \\2\end{pmatrix}$ alors $p(A\bigcap B)=$ $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}$ donc $p(A/B)=\dfrac{p(A\bigcap B)}{p(B)}=\dfrac{1}{6}\times 4=\dfrac{2}{3}$

3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

a. Montrons que : $p(X=0)$

L'événement $(X=0)$: $\begin{pmatrix}0\\ \\0\end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix}0\\ \\1\end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix}0\\ \\2\end{pmatrix}$ donc

$$p(X=0)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

b. Déterminons la loi de probabilité de X

On a $X(\Omega)=\{0,1,2,4\}$

— L'événement $(X=1)$: $\begin{pmatrix}1\\ \\1\end{pmatrix}$ donc $p(X=1)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

— L'événement $(X=2)$ c'est l'événement B donc $p(X=2)=p(B)=\dfrac{1}{4}$.

— L'événement $(X=4)$: $\begin{pmatrix}2\\ \\2\end{pmatrix}$ donc $p(X=4)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$.

— La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$(p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=4)=1)$.

c. On considère les événements : M : « le produit ab est pair non nul » et N : « le produit ab est égal à 1 »

Montrons que les événements M et N sont équiprobables

L'événement M : $\begin{pmatrix}1\\ \\2\end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix}2\\ \\1\end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix}2\\ \\2\end{pmatrix}$ donc

$$p(M)=p(X=2)+p(X=4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

L'événement N : $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $p(N) = p(X = 1) = \dfrac{1}{3}$.

Donc $p(M) = p(N)$ et par suite les événements M et N sont équiprobables.

Problème 1. $(11points)$

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x} + (1 - lnx)^2$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ $(unité : 1cm)$

1.

a. Vérifions que : $(\forall x \in]0, +\infty[), f(x) = \dfrac{3x - 2 - 2xlnx + x(lnx)^2}{x}$

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - \frac{2}{x} + (1 - lnx)^2 \\ &= \frac{2x - 2 + x(1 - lnx)^2}{x} \\ &= \frac{2x - 2 + x\left(1 - 2lnx + (lnx)^2\right)}{x} \\ &= \frac{2x - 2 + x - 2xlnx + x(lnx)^2}{x} \\ &= \frac{3x - 2 - 2xlnx + x(lnx)^2}{x} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[), f(x) = \dfrac{3x - 2 - 2xlnx + x(lnx)^2}{x}$.

b. Montrons que : $\lim\limits_{x \to 0^+} x(lnx)^2 = 0$ et que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{(lnx)^2}{x} = 0$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} x(lnx)^2 &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x}^2 \left(ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2 \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x}^2 \left(2ln\sqrt{x}\right)^2 \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} 4\sqrt{x}^2 \left(ln\sqrt{x}\right)^2 \end{aligned}$$

on pose $t=\sqrt{x}$ alors $(x\to 0^+ \Rightarrow t\to 0^+)$ donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} 4\sqrt{x}^2\left(ln\sqrt{x}\right)^2=\lim_{t\longrightarrow 0^+} 4t^2\left(lnt\right)^2=\lim_{t\longrightarrow 0^+} 4\left(t\times lnt\right)^2$$

et comme $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} t\times lnt=0$ alors $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} 4\left(t\times lnt\right)^2=0$ d'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\left(lnx\right)^2=0.$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\left(lnx\right)^2}{x}&=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\left(ln\sqrt{x}^2\right)^2}{\sqrt{x}^2}\\&=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\left(2ln\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}^2}\\&=\lim_{x\longrightarrow +\infty}4\times\frac{\left(ln\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}^2}\\&=\lim_{x\longrightarrow +\infty}4\times\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\end{aligned}$$

on pose $t=\sqrt{x}$ alors $(x\to +\infty \Rightarrow t\to +\infty)$ donc

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}4\times\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\longrightarrow +\infty}4\times\left(\frac{lnt}{t}\right)^2$$

et comme $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty}\dfrac{lnt}{t}=0$ alors $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty}4\times\left(\dfrac{lnt}{t}\right)^2=0$ d'où

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\left(lnx\right)^2}{x}=0.$$

c. Déduisons que : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=-\infty$, puis interprétons géométriquement le résultat

On a $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,f(x)=\dfrac{3x-2-2xlnx+x\left(lnx\right)^2}{x}$, et comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\left(lnx\right)^2=0\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -2xlnx=0\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 3x-2=-2\end{cases}$

alors par somme on obtient $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 3x-2-2xlnx+x\left(lnx\right)^2=-2$ et on a

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x = 0^+$ donc par quotient on obtient $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{3x-2-2xlnx+x\left(lnx\right)^2}{x} = -\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f\left(x\right) = -\infty$$

La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

d. <u>Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f\left(x\right)$</u>

On a

$$\begin{aligned}
\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right), f\left(x\right) &= \frac{3x-2-2xlnx+x\left(lnx\right)^2}{x} \\
&= 3-\frac{2}{x}-2lnx+\left(lnx\right)^2 \\
&= 3-\frac{2}{x}+lnx\left(-2+lnx\right)
\end{aligned}$$

et comme $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} lnx = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} -2+lnx = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} lnx\left(-2+lnx\right) = +\infty$ et on a $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} 3-\dfrac{2}{x} = 3$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f\left(x\right) = +\infty$.

<u>Montrons que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$</u>

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f\left(x\right) = +\infty$, calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x}$:

Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f\left(x\right)}{x} &= \frac{\dfrac{3x-2-2xlnx+x\left(lnx\right)^2}{x}}{x} \\
&= \frac{3x-2-2xlnx+x\left(lnx\right)^2}{x^2} \\
&= \frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2lnx}{x}+\frac{\left(lnx\right)^2}{x}
\end{aligned}$$

et comme $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{lnx}{x} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{(lnx)^2}{x} = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Donc le courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2. Montrons que : $(\forall x \in]0, +\infty[)\,, f'(x) = \dfrac{2(1 - x + xlnx)}{x^2}$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2 - \frac{2}{x} + (1 - lnx)^2\right)' \\ &= \frac{2}{x^2} + 2(1 - lnx)(1 - lnx)' \\ &= \frac{2}{x^2} - 2(1 - lnx) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2lnx}{x} \\ &= \frac{2 - 2x + 2xlnx}{x^2} \\ &= \frac{2(1 - x + xlnx)}{x^2} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[)\,, f'(x) = \dfrac{2(1 - x + xlnx)}{x^2}$.

3.

a. Prouvons que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puis dressons le T.V de f

D'après le tableau de variations de f', on a 0 est une valeur minimale de f' sur $]0, +\infty[$ donc $(\forall x \in]0, +\infty[)\,, f'(x) \geq 0$ (f' s'annule uniquement en 1). D'où f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On a

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 0.2 –

b. Déterminons le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f

— On a f' est décroissante sur les deux intervalles $]0,1]$ et $[\beta,+\infty[$ donc

$$(\forall x \in]0,1] \cup [\beta,+\infty[) \, , f''(x) \leq 0.$$

— On a f' est croissante sur l'intervalle $[1,\beta]$ donc $(\forall x \in [1,\beta]) \, , f''(x) \geq 0.$

x	0		1		β		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

FIGURE 0.3 –

—

c. Déduisons la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion

D'après ce qui précédé on a

x	0		1		β		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Concavite		*Concave*		*Convexe*		*Concave*	

FIGURE 0.4 –

On a f'' s'annule en changeant de signe en 1 et β donc les points $I(1, f(1))$ et $I'(\beta, f(\beta))$ sont deux points d'inflexions de la courbe (C_f).

4.

a. A partir de la courbe (C_g), déterminons le signe de la fonction g sur $]0,+\infty[$

D'après le courbe (C_g) on a :

On a (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[\alpha, 1]$ donc $(\forall x \in [\alpha, 1]), g(x) \geq 0$.

On a (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses sur $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$ donc $(\forall x \in]0, 1] \cup [1, +\infty[), g(x) \leq 0$.

Donc

x	0		α		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

FIGURE 0.5 –

b. <u>Déduisons que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha, 1]$ et au-dessus de (C_f) sur les intervalles $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$</u>

D'après ce qui précède on a

On a $(\forall x\, [\alpha, 1]), g(x) \geq 0$ donc $(\forall x \in [\alpha, 1]), f(x) - x \geq 0$ d'où la courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur $[\alpha, 1]$. Donc la droite (Δ) est en dessous de (C_f).

On a $(\forall x \in]0, \alpha] \cup [1, +\infty[), g(x) \leq 0$ donc $(\forall x \in]0, \alpha] \cup [1, +\infty[), f(x) - x \leq 0$ d'où la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (Δ) sur les deux intervalles $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$. Donc la droite (Δ) est au-dessus de (C_f) sur les deux intervalles $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$.

5. <u>Construisons la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.</u>

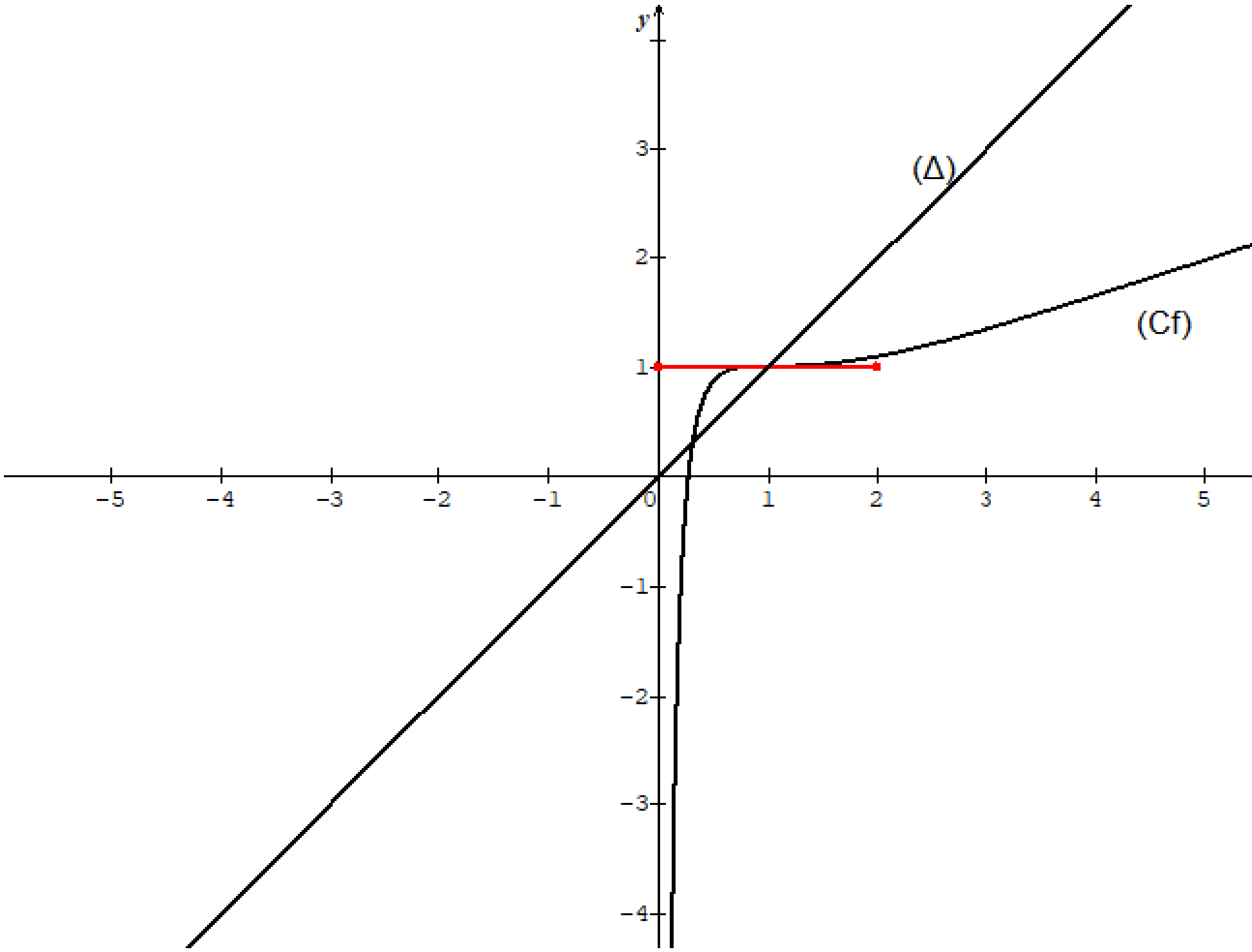

FIGURE 0.6 –

6.

a. Vérifions que la fonction $x \mapsto 2x - xlnx$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - lnx$ sur $[\alpha, 1]$

La fonction $x \mapsto 2x - xlnx$ est dérivable sur $[\alpha, 1]$, et pour tout $x \in [\alpha, 1]$ on a

$$\begin{aligned}(2x - xlnx)' &= 2 - \left(lnx + x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= 2 - (lnx + 1) \\ &= 2 - lnx - 1 \\ &= 1 - lnx\end{aligned}$$

donc la fonction $x \mapsto 2x - xlnx$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - lnx$ sur $[\alpha, 1]$.

b. <u>Montrons que :</u> $\int_{\alpha}^{1}(1-lnx)^2\,dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha$

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = (1-lnx)^2 \\ \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{-2(1-lnx)}{x} \\ \\ v(x) = x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{1}(1-lnx)^2\,dx &= \left[x\times(1-lnx)^2\right]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1}\frac{-2(1-lnx)}{x}\times x dx \\
&= \left((1-ln(1))^2-\alpha(1-ln\alpha)^2\right)+2\int_{\alpha}^{1}(1-lnx)\,dx \\
&= \left(1-\alpha(1-ln\alpha)^2\right)+2\left[2x-xlnx\right]_{\alpha}^{1} \\
&= \left(1-\alpha\left(1-2ln\alpha+(ln\alpha)^2\right)\right)+2\left(2-ln(1)-(2\alpha-\alpha ln\alpha)\right) \\
&= 1-\alpha+2\alpha ln\alpha-\alpha(ln\alpha)^2+2(2-2\alpha+\alpha ln\alpha) \\
&= 1-\alpha+2\alpha ln\alpha-\alpha(ln\alpha)^2+4-4\alpha+2\alpha ln\alpha \\
&= 5-5\alpha+4\alpha ln\alpha-\alpha(ln\alpha)^2 \\
&= 5(1-\alpha)+\alpha ln\alpha(4-ln\alpha) \\
&= 5(1-\alpha)+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha
\end{aligned}$$

d'où $\int_{\alpha}^{1}(1-lnx)^2\,dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha$.

c. <u>Déduisons en fonction α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$</u>

On a $\mathscr{A} = \left(\int_{\alpha}^{1}|f(x)|\,dx\right)\times ua$, et comme $(\forall x\in[\alpha,1])\,, f(x)\geq 0$ et $ua = \left\|\overrightarrow{i}\right\|\times\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1cm^2$ donc

$$\mathscr{A} = \left(\int_{\alpha}^{1}f(x)\,dx\right)\times 1cm^2$$

on a

$$
\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{1} 2-\frac{2}{x}+(1-lnx)^2\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{1} 2-\frac{2}{x}dx+\int_{\alpha}^{1}(1-lnx)^2\,dx \\
&= [2x-2lnx]_{\alpha}^{1}+\int_{\alpha}^{1}(1-lnx)^2\,dx \\
&= ((2-2ln1)-(2\alpha-2ln\alpha))+5(1-\alpha)+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha \\
&= 2-2\alpha+2ln\alpha+5(1-\alpha)+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha \\
&= 7-7\alpha+2ln\alpha+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha
\end{aligned}
$$

donc $\mathscr{A}=(7-7\alpha+2ln\alpha+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha)\,cm^2$ c'est-à-dire l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$ est : $(7-7\alpha+2ln\alpha+\alpha(4-ln\alpha)\,ln\alpha)\,cm^2$.

7. Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0\in\,]\alpha,1[$ et la relation $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a. Montrons que récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\alpha<u_n<1.$

— Pour $n=0$ on a $u_0\in\,]\alpha,1[$ alors la proposition est vraie pour $n=0$.
— Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\alpha<u_n<1$, montrons que : $\alpha<u_{n+1}<1$. On a $\alpha<u_n<1$ et comme la fonction f est strictement croissante sur $[\alpha,1]$ alors $f(\alpha)<f(u_n)<f(1)$ et comme $\begin{cases} f(\alpha)=\alpha \\ f(1)=1 \end{cases}$ puisque $g(x)=f(x)-x$ et $\begin{cases} g(\alpha)=0 \\ g(1)=0 \end{cases}$ donc $\alpha<u_{n+1}<1$.
— D'après le principe de récurrence on déduit que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\alpha<u_n<1$.

b. Montrons que la suite (u_n) est croissante

On a $(\forall x\in[\alpha,1]),f(x)-x\geq 0$ et comme $(\forall n\in\mathbb{N}),\alpha<u_n<1$, alors $f(u_n)\geq u_n$ donc $u_{n+1}\geq u_n$ par suite $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}-u_n\geq 0$. C'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

c. Déduisons que la suite (u_n) est convergente et calculons sa limite.

La suite (u_n) est croissante et puisqu'elle est majorée 1, alors elle est convergente.

La fonction f est continue sur $[\alpha, 1]$, et $f([\alpha, 1]) \subset [\alpha, 1]$ et la suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 \in]\alpha, 1[\\ \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et la suite (u_n) est convergente sa limite ℓ vérifie $\alpha \leq \ell \leq 1$ donc la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[\alpha, 1]$.

On a d'après 4-a l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et 1 donc $\ell = \alpha$ ou $\ell = 1$. Et comme la suite (u_n) est croissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq u_0$ par suite $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} u_n \geq u_0$ et comme $u_0 \in]\alpha, 1[$ alors $u_0 > \alpha$ donc $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} u_n > \alpha$ d'où

$$\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} u_n = 1.$$

FIN