الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2019
- الموضوع -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز	الرياضيات			المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها			الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants entre eux et un problème répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques	11 points

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, *on considère les points* $A(1;-1;-1)$, $B(0;-2;1)$ *et* $C(1;-2;0)$.

0,75 **1.a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

0,5 **b)** *En déduire que* $x+y+z+1=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,75 **2.** *Soit* (S) *la sphère d'équation :* $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$.
Montrer que le centre de la sphère (S) *est* $\Omega(2;-1;1)$ *et que son rayon est* $R=\sqrt{5}$.

0,5 **3. a)** *Calculer* $d(\Omega;(ABC))$ *la distance du point* Ω *au plan* (ABC).

0,5 **b)** *En déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (Γ).
(la détermination du centre et du rayon de (Γ) *n'est pas demandée)*

Exercice 2 : (3 points)

0,75 **1.** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :*

$$z^2-2z+4=0.$$

2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, *on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :*

$$a=1-i\sqrt{3},\ b=2+2i,\ c=\sqrt{3}+i \text{ et } d=-2+2\sqrt{3}i.$$

0,5 **a)** *Vérifier que :* $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$.

0,25 **b)** *En déduire que les points A, C et D sont alignés.*

0,5 **3.** *On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{-\pi}{3}$.

Vérifier que : $z'=\frac{1}{2}az$.

4. *Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que* $p=a-c$.

0,5 **a)** *Vérifier que :* $h=ip$.

0,5 **b)** *Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.*

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher.
On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
On considère les événements suivants :
A : « Obtenir trois boules vertes. »

B : « *Obtenir trois boules de même couleur.* »

C : « *Obtenir au moins deux boules de même couleur.* »

2 **1.** *Montrer que* $p(A)=\dfrac{1}{120}$ *et* $p(B)=\dfrac{7}{40}$.

1 **2.** *Calculer* $p(C)$.

Problème : (11 *points*)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2 .$$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité:1 cm).*

0,5 **1.** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *puis interpréter le résultat géométriquement.*

0,25 **2. a)** *Vérifier que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$.

0,5 **b)** *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,5 **c)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$.

0,75 **d)** *Montrer que* (C) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction asymptotique la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.

0,5 **3. a)** *Vérifier que pour tout x de* $]0;1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$

et que pour tout x de $[1;+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$.

1 **b)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$.

0,5 **c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*

0,5 **4. a)** *Montrer que* $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.

0,5 **b)** *En déduire que* (C) *admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.*

0,5 **5. a)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f(x)-x=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$ *et déduire la position relative de* (C) *et* (Δ).

1	**b)** *Construire* (Δ) *et* (C) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**6. a)** *Montrer que la fonction* $H: x \mapsto x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $h: x \mapsto \ln x$ *sur* $]0;+\infty[$.
0,75	**b)** *A l'aide d'une intégration par parties montrer que* $\int_1^e (\ln x)^2\,dx = e-2$.
0,5	**c)** *Calculer en* cm^2 *l'aire du domaine plan limité par* (C) *et* (Δ) *et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$.
	Deuxième partie :
	Soit (u_n) *la suite numérique définie par :* $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.a)** *Montrer par récurrence que* $1 \le u_n \le e$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*
0,5	**c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*
0,75	**2.** *Calculer la limite de la suite* (u_n).