CORRECTION EXAMEN NATIONAL SESSION NORMALE 2019

www.etude-generale.com

20 juin 2023

Exercice 1. (3 points)

1.

a. Montrons que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\
&= \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

par suite $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

b. Déduisons que $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point du plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}
M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 1 + y + 1 + z + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x + y + z + 1 = 0
\end{aligned}$$

par suite $(ABC) : x + y + z + 1 = 0.$

2. Soit (S)la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$. Montrons que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2, -1, 1)$ et que son rayon est $R = \sqrt{5}$

On a

$$M\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+2y+z^2-2z+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right)+\left(z^2-2z+1\right)-4-1-1+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2-5=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

donc le centre de la sphère (S)est le point $\Omega\,(2,-1,1)$ et son rayon $R=\sqrt{5}$.

3.

a. Calculons $d\,(\Omega,(ABC))$:

On a
$$d\,(\Omega,(ABC))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|2-1+1+1|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

donc $d\,(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}$.

b. Déduisons que le plan (ABC)coupe (S)selon un cercle (Γ)

On a $d\,(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}$ et comme $R=\sqrt{5}$ et $d\,(\Omega,(ABC))<R$ donc on déduit que le plan (ABC) coupe la sphère (S)selon un cercle (Γ) .

Exercice 2. $(3points)$

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+4=0$

On a $\begin{cases} a=1\\ b=-2\\ c=4\end{cases}$ donc $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times4=-12<0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : z_1 et z_2

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+i\sqrt{12}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

et comme $z_2=\overline{z_1}=\left(\overline{1+i\sqrt{3}}\right)=1-i\sqrt{3}$ donc

$$S=\left\{1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\right\}$$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$

a. Vérifions que : $a-d=-\sqrt{3}\,(c-d)$

On a

$$\begin{aligned} a-d &= 1-i\sqrt{3}-\left(-2+2\sqrt{3}\right) \\ &= 1-i\sqrt{3}+2-2\sqrt{3} \\ &= 3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3} \\ &= 3-\sqrt{3}\,(2+i) \qquad (1) \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}\,(c-d) &= -\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+i+2-2\sqrt{3}\right) \\ &= -3-i\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6 \\ &= 3-\sqrt{3}\,(2+i) \qquad (2) \end{aligned}$$

d'après (1) et (2) on déduit donc : $a-d=-\sqrt{3}\,(c-d)$

b. Déduisons que les points A, C et D sont alignés

On a : $a-d=-\sqrt{3}\,(c-d)$ alors $\dfrac{a-d}{c-d}=-\sqrt{3}$ donc $\dfrac{a-d}{c-d}\in\mathbb{R}$, par suite les points A, C et D sont alignés.

3. On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$

Vérifions que : $z'=\dfrac{1}{2}az$

On a

$$\begin{aligned} R\,(M)=M' &\Leftrightarrow z'-z_O=e^{-i\frac{\pi}{3}}\,(z-z_O) \\ &\Leftrightarrow z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z \\ &\Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ &\Leftrightarrow z'=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)z}{2} \\ &\Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}z\times a \\ &\Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}az \end{aligned}$$

donc $z'=\dfrac{1}{2}az$

4. Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que : $p=a-c$

a. Vérifions que : $h=ip$

On a d'après l'expression complexe de la rotation R

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2+2i) \\ &= \frac{1}{2}\left(2 + 2i - 2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2 + 2\sqrt{3} + i\left(2 - 2\sqrt{3}\right)\right) \\ &= 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} ip &= i(a-c) \\ &= i\left(1 - i\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} + i\right)\right) \\ &= i\left(1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i\right) \\ &= i\left(1 - \sqrt{3} - i\left(\sqrt{3} + 1\right)\right) \\ &= i\left(1 - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3} + 1\right) \\ &= 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

d'après (3) et (4) on déduit que : $h = ip$

b. Montrons que le triangle (OHP) est rectangle et isocèle en O.

On a

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}\right) &\equiv arg\left(\frac{h - z_O}{p - z_O}\right) [2\pi] \\ &\equiv arg\left(\frac{h}{p}\right) [2\pi] \\ &\equiv arg\left(\frac{ip}{p}\right) [2\pi] \\ &\equiv arg\,(i)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{aligned}$$

donc $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, par suite le triangle (OHP) est rectangle en O.

De plus on a : $OH = |h| = |ip| = |i| \times |p| = |p| = OP$, donc $OH = OP$ par suite le triangle (OHP) est isocèle en O, ceci signifie que le triangle (OHP) est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3. $(3points)$

1. Montrons que : $p(A) = \dfrac{1}{120}$ et $p(B) = \dfrac{7}{40}$

Le tirage au hasard, d'un seul coup de 3 boules d'une urne contenant au total 10 boules nous oblige d'utiliser les combinaisons C_{10}^3 donc $card(\Omega) = C_{10}^3 = 120$ avec Ω l'univers de toutes les éventualités possibles.

L'événement A : « obtenir trois boules vertes » c'est-à-dire $A : \begin{pmatrix} V \\ V \\ V \end{pmatrix}$ donc

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

L'événement B : « obtenir trois boules de même couleur » c'est-à-dire $B : \begin{pmatrix} V \\ V \\ V \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} R \\ R \\ R \end{pmatrix}$

donc

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{40}$$

2. Calculons $p(C)$:

L'événement C : « obtenir au moins deux boules de même couleur »

c'est-à-dire $C : \begin{pmatrix} V \\ V \\ \overline{V} \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} R \\ R \\ \overline{R} \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} V \\ V \\ V \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} R \\ R \\ R \end{pmatrix}$ donc

$$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 + C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{102}{120} = \frac{17}{20}$$

Problème 1. (11 pts)

Première partie

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ **par :** $f(x) = x + \dfrac{1}{2} - lnx + \dfrac{1}{2}(lnx)^2$

1. Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$, puis interprétons le résultat géométriquement :

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} lnx = -\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} -lnx = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{2}(lnx)^2 = +\infty \end{cases}$ donc par somme on obtient $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x + \dfrac{1}{2} - lnx + \dfrac{1}{2}(lnx)^2 = +\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Donc la courbe (C)admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

2.

a. Vérifions que : $(\forall x \in]0, +\infty[), f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}lnx - 1\right) lnx$

Soit $x \in]0,+\infty[$, on a

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2 = x + \frac{1}{2} + lnx\left(\frac{1}{2}lnx - 1\right)$$

donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}lnx - 1\right)lnx$

b. Déduisons que : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x + \dfrac{1}{2} = +\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} lnx = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -1 + \dfrac{1}{2}lnx = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} lnx\left(\dfrac{1}{2}lnx - 1\right) = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x + \dfrac{1}{2} + lnx\left(\dfrac{1}{2}lnx - 1\right) = +\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$$

c. Montrons que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, \dfrac{(lnx)^2}{x} = 4\left(\dfrac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

Soit $x \in]0,+\infty[$,on a

$$\begin{aligned} \frac{(lnx)^2}{x} &= \frac{\left(ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \left(\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, \dfrac{(lnx)^2}{x} = 4\left(\dfrac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

Déduisons que : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{(lnx)^2}{x} = 0$

On a $\dfrac{(lnx)^2}{x} = 4\left(\dfrac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\longrightarrow+\infty} \dfrac{lnX}{X} = 0 \left(\begin{array}{c} X = \sqrt{x} \\ \\ x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow X \longrightarrow +\infty \end{array}\right)$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 4\left(\dfrac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{(lnx)^2}{x} = 0$.

d. Montrons que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$:

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x+\frac{1}{2}-lnx+\frac{1}{2}(lnx)^2}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{lnx}{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(lnx)^2}{x}$ et $\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}1+\dfrac{1}{2x}=1\\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{lnx}{x}=0\\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{(lnx)^2}{x}=0\end{cases}$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{lnx}{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(lnx)^2}{x}=1$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-x)$:

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\longrightarrow+\infty}x+\frac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{2}lnx-1\right)lnx-x\\&=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2}+lnx\left(\frac{1}{2}lnx-1\right)\end{aligned}$$

et comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}lnx=+\infty\\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{2}lnx-1=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{2}+lnx\left(\dfrac{1}{2}lnx-1\right)=+\infty$ par suite

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-x)=+\infty.$$

Donc la courbe (C)admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y=x$.

3.

a. Montrons que : $(\forall x\in]0,1])\,,(x-1)+lnx\leq 0$ et $(\forall x\in[1,+\infty[)\,,(x-1)+lnx\geq 0$

— Soit $x\in]0,1]$,on a $0<x\leq 1$ alors $-1<x-1\leq 0$ donc $x-1\leq 0$ et comme $(\forall x\in]0,1])\,,lnx\leq 0$ alors $(\forall x\in]0,1])\,,(x-1)+lnx\leq 0$.

— Soit $x\in[1,+\infty[$,on a $x\geq 1$ alors $x-1\geq 0$ et comme $(\forall x\in[1,+\infty[)\,,lnx\geq 0$ alors $(\forall x\in]0,1])\,,(x-1)+lnx\geq 0$.

On déduit que : $\begin{cases}(\forall x\in]0,1])\,,(x-1)+lnx\leq 0\\ (\forall x\in[1,+\infty[)\,,(x-1)+lnx\geq 0\end{cases}$.

b. Montrons que : $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right),f'(x)=\dfrac{x-1+lnx}{x}$

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ on a

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2\right)' \\
&= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 \times lnx \times \frac{1}{x} \\
&= 1 - \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x} \\
&= 1 + \frac{-1 + lnx}{x} \\
&= \frac{x - 1 + lnx}{x}
\end{aligned}
$$

donc $\left(\forall x \in \left]0, +\infty\right[\right), f'(x) = \dfrac{x - 1 + lnx}{x}$

c. Dressons le tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1 + lnx$ sur $\left]0, +\infty\right[$ car $\left(\left(\forall x \in \left]0, +\infty\right[\right), x > 0\right)$ et d'après la question 3-a on a $\begin{cases} (\forall x \in]0, 1]), (x - 1) + lnx \leq 0 \\ (\forall x \in [1, +\infty[), (x - 1) + lnx \geq 0 \end{cases}$ donc on obtient le tableau de variation suivant

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$

Table 1 –

4.

a. Montrons que : $(\forall x \in]0, +\infty[), f''(x) = \dfrac{2 - lnx}{x^2}$

La fonction f est 2 fois dérivables sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a :

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{x - 1 + lnx}{x}\right)' \\
&= \frac{(x - 1 + lnx)' \times x - (x - 1 + lnx)}{x^2} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x - x + 1 - lnx}{x^2} \\
&= \frac{x + 1 - x + 1 - lnx}{x^2} \\
&= \frac{2 - lnx}{x^2}
\end{aligned}
$$

donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, f''(x) = \dfrac{2 - lnx}{x^2}$

b. Déduisons que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

Le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - lnx$ car $((\forall x \in]0,+\infty[)\,, x^2 > 0)$

On a : $2 - lnx = 0 \Leftrightarrow lnx = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

donc : $x > e^2 \Leftrightarrow lnx > 2 \Leftrightarrow 2 - lnx < 0$

et : $0 < x < e^2 \Leftrightarrow lnx < 2 \Leftrightarrow 2 - lnx > 0$

par suite

x	0	$e2$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Concavite	*Convexe*		*Concave*

FIGURE 1 –

f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 = e^2$ donc le point $I(e^2, f(e^2))$ est un point d'inflexion de (C) et comme $f(e^2) = e^2 + \dfrac{1}{2}$ donc $I\left(e^2, e^2 + \dfrac{1}{2}\right)$est un point d'inflexion de (C).

5.

a. Montrons que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, f(x) - x = \dfrac{1}{2}(lnx - 1)^2$

Soit $x \in]0,+\infty[$,on a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2 - x \\ &= \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left((lnx)^2 - 2lnx + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(lnx - 1)^2 \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, f(x) - x = \dfrac{1}{2}(lnx - 1)^2$

Déduisons la position relative de (C) et (Δ)

On a $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, f(x) - x \geq 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(lnx - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (lnx - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow lnx - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow lnx = 1 \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

— La courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur les deux intervalles $]0, e[$ et $]e, +\infty[$.

— $(C) \cap (\Delta) = \{A(e,e)\}$.

b. Construction (C)et (Δ)

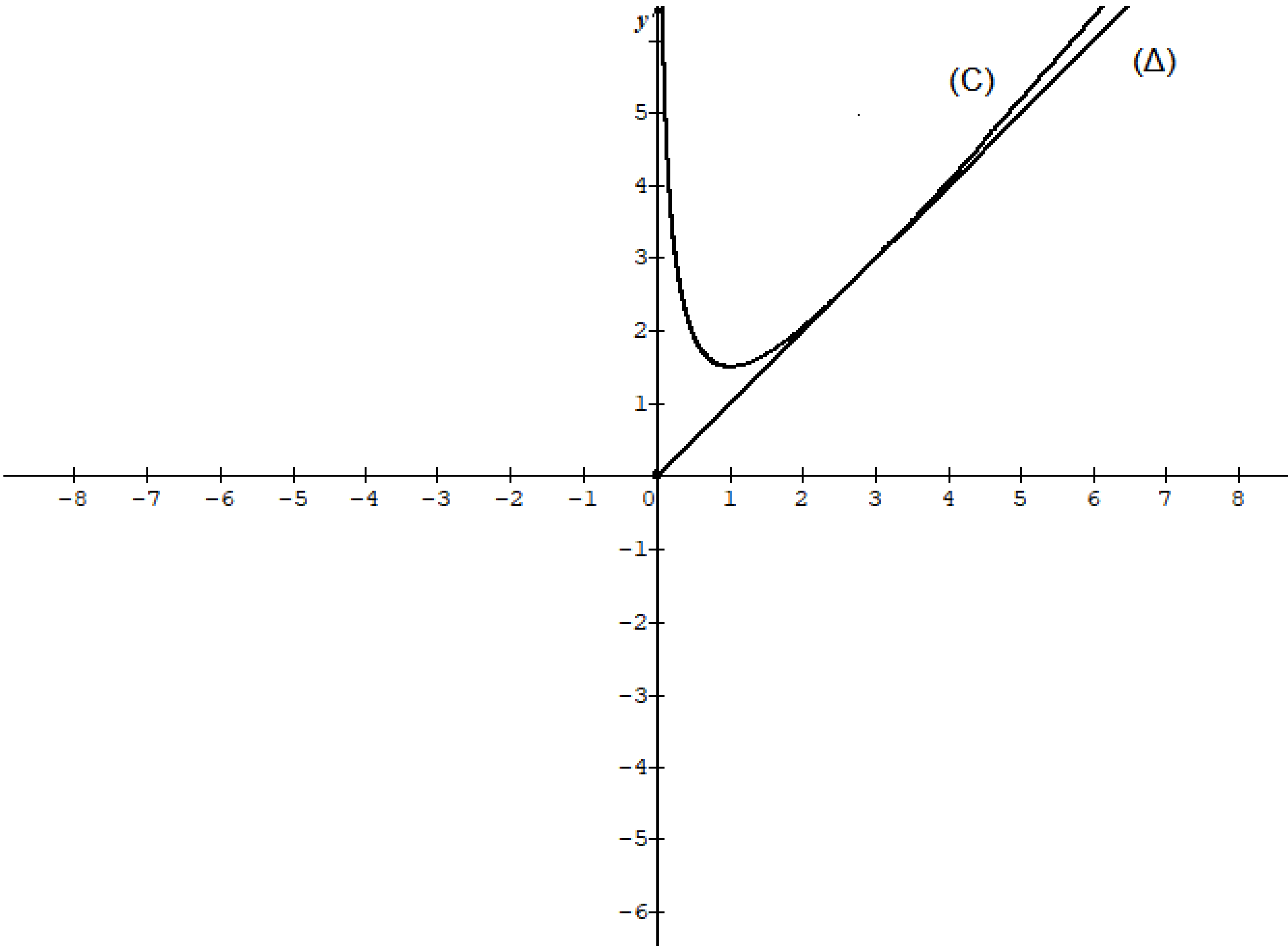

FIGURE 2 –

6.

a. Montrons que $H : x \longmapsto xlnx - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longmapsto lnx$ sur $]0, +\infty[$

La fonction H est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} H'(x) &= (xlnx - x)' \\ &= lnx + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= lnx + 1 - 1 \\ &= lnx \\ &= h(x) \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $H'(x) = h(x)$, d'où $H : x \longmapsto xlnx - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longmapsto lnx$ sur $]0, +\infty[$.

b. Montrons que : $\int_1^e (lnx)^2 \, dx = e - 2$

En utilisant une intégration par parties, on a

$$\begin{cases} u(x) = (lnx)^2 \\ \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2lnx}{x} \\ \\ v(x) = x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_1^e (lnx)^2\, dx &= \left[x(lnx)^2\right]_1^e - \int_1^e 2lnxdx \\ &= e - 2\int_1^e lnxdx \\ &= e - 2\left[xlnx - x\right]_1^e \\ &= e - 2\left(e - e - (-1)\right) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

donc $\int_1^e (lnx)^2\, dx = e - 2.$

c. <u>Calculons en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$</u>

On a $\mathscr{A} = \left(\int_1^e |f(x) - x|\, dx\right) \times ua$, et comme $(\forall x \in [1, e])\,, f(x) - x \geq 0$ et : $ua = \|i\| \times \|j\| = 1cm^2$ donc

$$\mathscr{A} = \left(\int_1^e (f(x) - x)\, dx\right) \times 1cm^2$$

on a

$$\begin{aligned} \int_1^e (f(x) - x)\, dx &= \int_1^e \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2\, dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{1}{2} - lnx\right) dx + \frac{1}{2}\int_1^e (lnx)^2\, dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{2}dx - \int_1^e lnxdx + \frac{1}{2}\int_1^e (lnx)^2\, dx \\ &= \left[\frac{x}{2}\right]_1^e - \underbrace{\left[xlnx - x\right]_1^e}_{=1} + \frac{1}{2}(e-2) \\ &= \frac{1}{2}(e-1) - 1 + \frac{1}{2}(e-2) \\ &= e - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

donc $\mathscr{A} = \left(e - \dfrac{5}{2}\right) cm^2$c'est-à-dire l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ est $\left(e - \dfrac{5}{2}\right) cm^2$.

Deuxième partie

Soit (u_n)la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1.

a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq u_n \leq e$

— Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et comme $1 \leq u_0 \leq e$ alors la proposition est vraie pour $n = 0$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leq u_n \leq e$, montrons que : $1 \leq u_n \leq e$. On a $1 \leq u_n \leq e$ et comme la fonction f est strictement croissante sur $[1, e]$ alors $f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$ et comme $f(e) = e$ et $(\forall x\,]0, +\infty[), f(x) \geq x$ alors $f(1) \geq 1$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq e$.
— D'après le principe de récurrence on déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq u_n \leq e$

b. Montrons que la suite (u_n) est croissante

On a $(\forall x \in]0, +\infty[), f(x) \geq x$ et comme $1 \leq u_n \leq e$, alors $f(u_n) \geq u_n$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ par suite $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n \geq 0$. C'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

c. Déduisons que la suite (u_n)est convergente

La suite (u_n) est croissante et puisqu'elle est majorée par e, alors elle est convergente.

2. Calculons la limite de la suite (u_n)

La fonction f est continue sur $[1, e]$, et $f([1, e]) \subset [1, e]$ et la suite (u_n) est définie par :
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et la suite (u_n) est convergente sa limite ℓ vérifie $1 \leq \ell \leq e$, donc la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1, e]$ et comme e est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[1, e]$ alors $\ell = e$ c'est-à-dire

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = e.$$

www.etude − generale.com