CORRECTION D'EXAMEN NATIONAL SR *2014

Yahya MATIOUI

27 juin 2023

www.etude-generale.com

Exercice 1. .

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ le point $A(0,0,1)$ le plan (P) d'équation $2x+y-2z-7=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0,3,-2)$ et de rayon 3.

1.

a. Montrons que : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad / \, (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P).

On a $2x+y-2z-7=0$ est une équation cartésienne au plan (P) donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P) et comme $(\Delta) \perp (P)$ alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et puisqu'elle passe par $A(0,0,1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad / \, (t \in \mathbb{R})$

*SESSION : rattrapage 2014

b. <u>Vérifions que $H(2,1,-1)$ est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ)</u>

On a : $2\times 2+1-2\times(-1)-7=4+1+2-7=0$, donc $H\in(P)$.

Pour $t=1$ dans la représentation paramétrique on a $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ par suite

$H\in(P)\cap(\Delta)$.

2.

a. <u>Montrons que : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}=3\left(\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\right)$ avec $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$</u>

On a $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et comme $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \\
&= 3\overrightarrow{i}+6\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k} \\
&= 3\left(\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\right)
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}=3\left(\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\right)$

b. <u>Montrons que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3</u>

La droite (Δ) passe par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc

$d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et comme $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{3^2+6^2+6^2} = \sqrt{81}=9$ et $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$ donc

$$d(\Omega,(\Delta))=\frac{9}{3}=3$$

c. <u>Déduisons que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifions que H est le point de contact de la droite (Δ) et la sphère (S)</u>

— On a $d(\Omega,(\Delta)) = 3$ et comme $R = 3$ alors $d(\Omega,(\Delta)) = R$ donc la droite (Δ) est tangente à la sphère (S).

— On a $\overrightarrow{\Omega H}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\Omega H = \sqrt{4+4+1} = 3$ par suite $\Omega H = R$ c'est-à-dire $H \in (S)$ et on a $H \in (P)$ donc $(S)\cap(P) = \{H\}$ ceci signifie que H est le point de contact de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 2. ($3 points$)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} \end{cases}$

1. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n > 2$

— Pour $n = 1$, on a $u_1 = 5$ et comme $u_1 > 2$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n > 2$ et on montre que $u_{n+1} > 2$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{5u_n - 4}{1+u_n} - 2 \\ &= \frac{5u_n - 4 - 2(1+u_n)}{1+u_n} \\ &= \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{3u_n - 6}{1+u_n} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{1+u_n} \end{aligned}$$

et comme $u_n > 2$ alors $\begin{cases} 3(u_n - 2) > 0 \\ 1 + u_n > 0 \end{cases}$ donc $\dfrac{3(u_n-2)}{1+u_n} > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - 2 > 0$ par suite $u_{n+1} > 2$.

— D'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n > 2$.

2. On considère le suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$.

a. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$, et montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{3}{u_{n+1}-2} \\
&= \frac{3}{\dfrac{5u_n-4}{1+u_n}-2} \\
&= \frac{3}{\dfrac{5u_n-4-2\left(1+u_n\right)}{1+u_n}} \\
&= \frac{3\left(1+u_n\right)}{5u_n-4-2-2u_n} \\
&= \frac{3\left(1+u_n\right)}{3u_n-6} \\
&= \frac{3\left(1+u_n\right)}{3\left(u_n-2\right)} \\
&= \frac{1+u_n}{u_n-2}
\end{aligned}$$

donc $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n-2}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1+u_n}{u_n-2} - \frac{3}{u_n-2} \\
&= \frac{1+u_n-3}{u_n-2} \\
&= \frac{u_n-2}{u_n-2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), v_{n+1} - v_n = 1$. Par suite la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1.

b. Exprimons v_n en fonction de n et déduisons que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$

— La suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$est arithmétique de raison 1 alors

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), v_n = v_1 + (n-1)\, r$$

et comme $\begin{cases} v_1 = 1 \\ \\ r = 1 \end{cases}$ donc $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), v_n = n$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$on a

$$\begin{aligned} v_n = \frac{3}{u_n - 2} &\Leftrightarrow v_n\left(u_n - 2\right) = 3 \\ &\Leftrightarrow v_n \times u_n - 2v_n = 3 \\ &\Leftrightarrow v_n \times u_n = 2v_n + 3 \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n} \\ &\Leftrightarrow u_n = 2 + \frac{3}{v_n} \\ &\Leftrightarrow u_n = 2 + \frac{3}{n} \end{aligned}$$

donc $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$

c. Déterminons $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$

On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 2 + \dfrac{3}{n} = 2$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 2$.

Exercice 3. .

1. Montrons que : $p\left(A\right) = \dfrac{1}{45}$ et $p\left(B\right) = \dfrac{16}{45}$

Le tirage au hasard, successivement et sans remise de deux cartes d'une urne contenant au total 10 cartes nous oblige d'utiliser les arrangements A_{10}^2 donc $card\left(\Omega\right) = A_{10}^2 = 90$ avec Ω l'univers de toutes les éventualités possibles.

— L'événement : A « Tirer deux cartes concernant la langue française » c'est-à-dire $A : \begin{pmatrix} F \\ \\ F \end{pmatrix}$ donc

$$p\left(A\right) = \frac{A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

— L'événement : B « Tirer deux cartes concernant deux matières différentes » c'est-à-dire $B : \begin{pmatrix} F \\ \\ M \end{pmatrix}$ (en tenant compte à l'ordre) donc

$$p\left(B\right) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 \times A_2^1 \times A_8^1}{A_{10}^2} = \frac{2 \times 2 \times 8}{90} = \frac{16}{45}$$

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

a. Vérifions que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $0, 1$ et 2

Lorsqu'on tire 2 cartes de l'urne c'est possible :

— de tirer 2 cartes concernant la langue française (X prend la valeur 2)
— de tirer une seule carte concernant la langue française et l'autre concernant les mathématiques. (X prend la valeur 1).
— de tirer 2 cartes concernant les mathématiques (X prend la valeur 0).

Donc les valeur prises par la variable aléatoire X sont 0,1 et 2 c'est-à-dire $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

b. Montrons que : $p(X = 0) = \dfrac{28}{45}$ puis on donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

— L'événement $(X = 0)$: « le tirage ne contient aucune carte de la langue française » c'est-à-dire $(X = 0)$: $\begin{pmatrix} \overline{F} \\ \\ \overline{F} \end{pmatrix}$ donc

$$p(X = 0) = \frac{A_8^2}{A_{10}^2} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

— L'événement $(X = 1)$ c'est exactement l'événement B « Tirer deux cartes concernant deux matières différentes » donc $p(X = 1) = p(B) = \dfrac{16}{45}$.
— L'événement $(X = 2)$ c'est exactement l'événement A « Tirer deux cartes concernant la langue française » donc $p(X = 2) = p(A) = \dfrac{1}{45}$.

— La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

$(p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 1)$.

Exercice 4. .

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

On a $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$. Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+i\sqrt{4}}{2} = \frac{2\left(2+i\right)}{2} = 2+i$$

et comme $z_2 = \left(\overline{z_1}\right) = \left(\overline{2+i}\right) = 2-i$ donc $S = \{2-i, 2+i\}$.

2. On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2+i$, $b = 2-i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$.

a. Montrons que : $\dfrac{a-\omega}{b-\omega} = i$

On a

$$\begin{aligned}\frac{a-\omega}{b-\omega} &= \frac{2+i-1}{2-i-1}\\ &= \frac{1+i}{1-i}\\ &= \frac{\left(1+i\right)\left(1+i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}\\ &= \frac{\left(1+i\right)^2}{1+1}\\ &= \frac{2i}{2}\\ &= i\end{aligned}$$

donc $\dfrac{a-\omega}{b-\omega} = i$.

b. Déduisons que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

— On a

$$\begin{aligned}\left(\overline{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}}\right) &\equiv arg\left(\frac{a-\omega}{b-\omega}\right)[2\pi]\\ &\equiv arg\left(i\right)[2\pi]\end{aligned}$$

et comme $arg\left(i\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. Ceci signifie que le triangle ΩAB est rectangle en Ω.

— On a $\dfrac{a-\omega}{b-\omega} = i$ alors $\left|\dfrac{a-\omega}{b-\omega}\right| = |i|$ par suite $\dfrac{|a-\omega|}{|b-\omega|} = 1$ d'ou $|a-\omega| = |b-\omega|$ et comme $\begin{cases}\Omega A = |a-\omega|\\ \\ \Omega B = |b-\omega|\end{cases}$ c'est-à-dire $\Omega A = \Omega B$. Ceci signifie que le triangle ΩAB est isocèle en Ω.

On déduit que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

3. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Montrons que : $z' = iz + 1 - i$

On a

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega) \\ &\Leftrightarrow z' - 1 = \left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)(z-1) \\ &\Leftrightarrow z' - 1 = i(z-1) \\ &\Leftrightarrow z' - 1 = iz - i \\ &\Leftrightarrow z' = iz + 1 - i \end{aligned}$$

donc $z' = iz + 1 - i$

b. Vérifions que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

— On a d'après l'expression complexe de la rotation :

$$\begin{aligned} ia + 1 - i &= i(2+i) + 1 - i \\ &= 2i - 1 + 1 - i \\ &= i \\ &= c \end{aligned}$$

donc $R(A) = C$.

— On a d'après l'expression complexe de la rotation :

$$\begin{aligned} id + 1 - i &= i \times (-i) + 1 - i \\ &= 1 + 1 - i \\ &= 2 - i \\ &= b \end{aligned}$$

donc $R(D) = B$.

c. Montrons que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre

On a $\begin{cases} R(A) = C \\ R(D) = B \end{cases}$ alors $\begin{cases} \Omega A = \Omega C \\ \Omega D = \Omega B \end{cases}$ et comme $\Omega A = \Omega B$ donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ c'est-à-dire les points A, B,C et D appartiennent au même cercle de centre Ω.

Exercice 5. .

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (xe^x - 1)e^x$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *(unité : 2cm)*

1. Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^x - 1 = -1$ et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (xe^x - 1)e^x = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Interprétation géométrique de ce résultat

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$, donc la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$. (l'axe des abscisses)

2.

a. Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xe^x - 1 = +\infty$ et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (xe^x - 1)e^x = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{(xe^x - 1)e^x}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (xe^x - 1) \times \dfrac{e^x}{x}$

et comme $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xe^x - 1 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (xe^x - 1) \times \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

b. Déduisons que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3.

a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x)$ puis vérifions $f'(0) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((xe^x - 1)\, e^x\right)' \\
&= (xe^x - 1)'\, e^x + (xe^x - 1)\,(e^x)' \\
&= (e^x + xe^x)\, e^x + (xe^x - 1)\, e^x \\
&= e^x\,(e^x + xe^x + xe^x - 1) \\
&= e^x\,(e^x - 1 + 2xe^x)
\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,, f'(x) = e^x\,(e^x - 1 + 2xe^x)$
On a $f'(0) = e^0\left(e^0 - 1 + 2 \times 0 \times e^0\right) = 1 \times (1-1) = 0.$

b. Montrons que : $\begin{cases} (\forall x \in [0, +\infty[)\,, e^x - 1 \geq 0 \\ \\ (\forall x \in]-\infty, 0])\,, e^x - 1 \leq 0 \end{cases}$

— Soit $x \in [0, +\infty[$, on a $x \geq 0$ alors $e^x \geq e^0$ (la fonction $x \mapsto exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) donc $e^x \geq 1$ d'où $(\forall x \in [0, +\infty[)\,, e^x - 1 \geq 0.$

— Soit $x \in]-\infty, 0]$, on a $x \leq 0$ alors $e^x \leq e^0$ donc $e^x \leq 1$ d'où

$$(\forall x \in]-\infty, 0])\,, e^x - 1 \geq 0.$$

Donc $\begin{cases} (\forall x \in [0, +\infty[)\,, e^x - 1 \geq 0 \\ \\ (\forall x \in]-\infty, 0])\,, e^x - 1 \leq 0 \end{cases}$

c. Montrons que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

— On a $\begin{cases} (\forall x \in [0, +\infty[)\,, e^x - 1 \geq 0 \\ \\ (\forall x \in [0, +\infty[)\,, e^x \geq 0 \\ \\ (\forall x \in [0, +\infty[)\,, 2xe^x \geq 0 \end{cases}$ alors $(\forall x \in [0, +\infty[)\,, e^x\,(e^x - 1 + 2xe^x) \geq 0$ c'est-à-dire $(\forall x \in [0, +\infty[)\,, f'(x) \geq 0$. D'où la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.

— On a $\begin{cases} (\forall x \in]-\infty, 0])\,, e^x - 1 \leq 0 \\ \\ (\forall x \in]-\infty, 0])\,, 2xe^x \leq 0 \end{cases}$ alors $(\forall x \in]-\infty, 0])\,, e^x - 1 + 2xe^x \leq 0$ et comme $(\forall x \in]-\infty, 0])\,, e^x \geq 0$ donc $(\forall x \in]-\infty, 0])\,, f'(x) \leq 0$. D'où la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

— On dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 0.1 –

4.

a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, +\infty[$ et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ car $((\forall x \in [0, +\infty[)\,, f'(x) \geq 0$ et f' s'annule uniquement en $0)$, de plus $f([0, +\infty[) = [f(0)\,, \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$, et comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors on déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

Montrons que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$

La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et on a $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - 1\right)e^{\frac{1}{2}}$ et

comme $\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - 1 < 0 \\ \\ e^{\frac{1}{2}} > 0 \end{cases}$ donc $\left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - 1\right)e^{\frac{1}{2}} < 0$ par suite $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$

et $f(1) = (e-1)\,e > 0$ car $(e - 1 > 0)$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$. D'ou d'après le T.V.I on a $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

b. Construction de la courbe (C) :

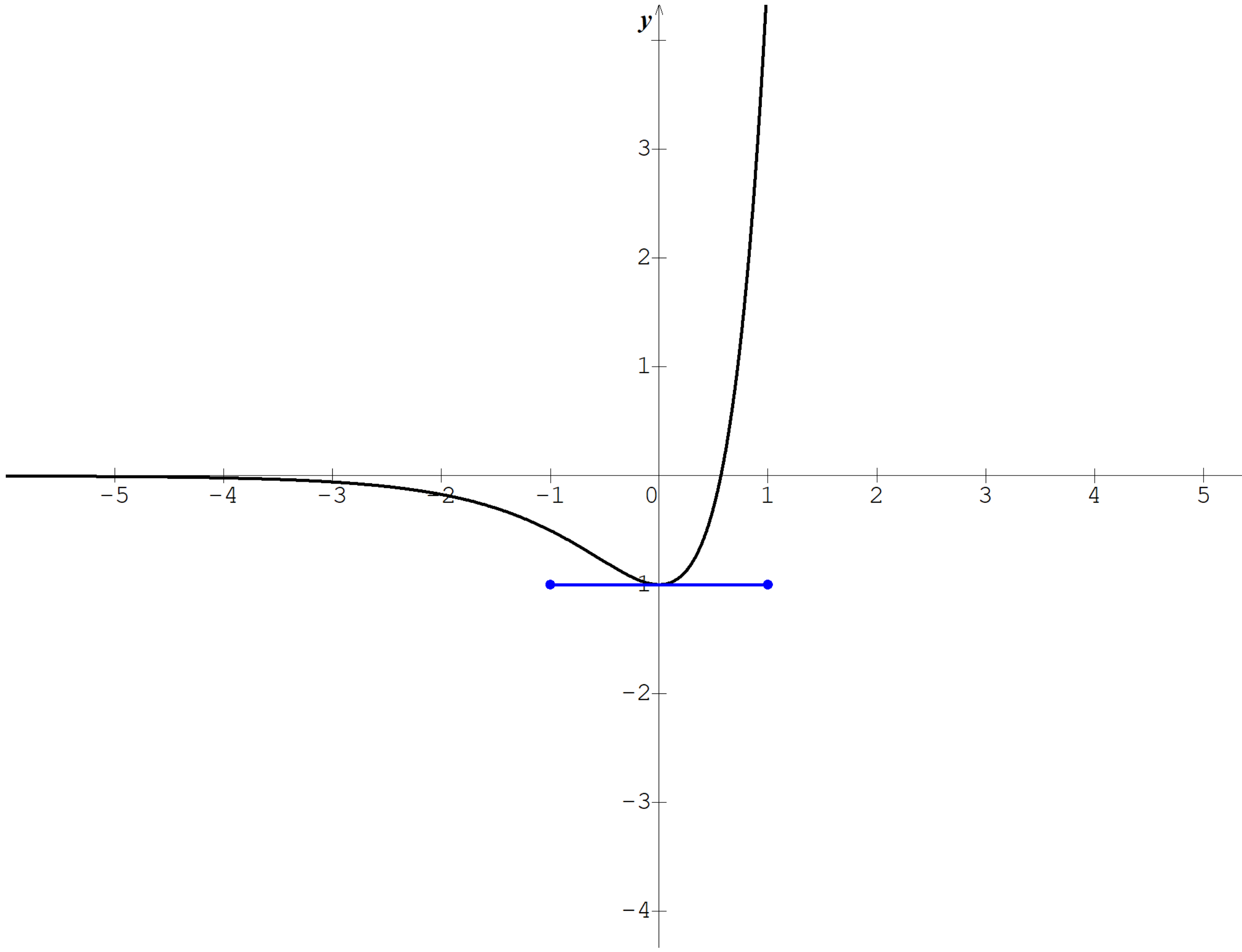

FIGURE 0.2 –

5. Montrons que : $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \dfrac{1}{4}$.

On pose

$$\begin{cases} u(x) = x \\ \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ \\ v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx &= \left[x \times \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x}dx \\
&= \left(\frac{1}{4}e - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx \\
&= \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

par suite $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \dfrac{1}{4}$.

6. Calculons en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

On a $\mathscr{A} = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx\right) \times ua$ et comme $\left(\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right)$, $f(x) \leq 0$ alors $|f(x)| = -f(x)$ et $ua = \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 2 \times 2 = 4cm^2$ donc

$$\mathscr{A} = \left(-\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx\right) \times 4cm^2$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (xe^x - 1)\, e^x dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} - e^x dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx \\
&= \frac{1}{4} - [e^x]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4} - \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{4} - e^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&= \frac{5}{4} - e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{A} = \left(4\left(-\frac{5}{4} + e^{\frac{1}{2}}\right)\right) cm^2 = (4\sqrt{e} - 5)\, cm^2$.

$\mathbb{FIN}$