CORRECTION EXAMEN

EXERCICE 1 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases}$

et : $v_n = u_n + n - 1$, *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.

1. *Montrons que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{5}$:

   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + n + 1 - 1 \\ &= u_{n+1} + n \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) + n \\ &= \frac{1}{5}u_n - \frac{4}{5}n - \frac{1}{5} + n \\ &= \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}n - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}(u_n + n - 1) \\ &= \frac{1}{5}v_n \end{aligned}$$

   donc $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

   d'où, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{5}$, *et de premier terme* $v_0 = 1$.

2. **a)** *Calculons* v_n *en fonction de* n :

   On a : $v_n = v_0 \times q^n$ *et comme* $\begin{cases} v_0 = 1 \\ q = \frac{1}{5} \end{cases}$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

   b) *Déduisons* u_n *en fonction de* n :

   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$v_n = u_n + n - 1 \iff u_n = v_n - n + 1 \iff u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n - n + 1$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\;\; u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n - n + 1.$

Déterminons $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$:

On a : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \quad \left(car\; -1 < \frac{1}{5} < 1\right)$ *et comme* $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} -n + 1 = -\infty$

donc $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - n + 1 = -\infty$ *c'est-à-dire* $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = -\infty.$

3. *Montrons que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\;\; T_n = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right).$

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
T_n &= v_0 + v_1 + ... + v_n \\
&= v_0 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{5}}\right) \\
&= \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5}} \\
&= \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)
\end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\;\; T_n = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right).$

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\;\; S_n = T_n - \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}.$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\
&= \left((\frac{1}{5})^0 - 0 + 1\right) + \left((\frac{1}{5})^1 - 1 + 1\right) + ... + \left((\frac{1}{5})^n - n + 1\right) \\
&= \underbrace{\left(\left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + ... + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}_{=T_n} - \left(\underbrace{0 + 1 + 2 + ... + n}_{La\ somme\ d'une\ suite\ arithmétique}\right) + (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n+1\ fois}) \\
&= T_n - \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= T_n + (n+1)\left(\frac{-n}{2} + 1\right) \\
&= T_n + (n+1)\left(\frac{-n+2}{2}\right) \\
&= T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\quad S_n = T_n - \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}.$

EXERCICE 2 .

On considère dans le plan complexe (P) les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -4$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ *et* $z_C = -iz_B$.

1. **a)**

- *Montrons que le trinagle OBC est isocèle.*

  On a : $OB = |z_B - z_O| = |z_B| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ *et* $OC = |z_C| = |-iz_B| = |-i| \times |z_B| = 2$. *Donc :* $OB = OC$. *Ceci signifie que le triangle OBC est isocèle en O.*

- *Montrons que :* $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

  On a

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z_C}{z_B}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{-iz_B}{z_B}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg(-i)\,[2\pi] \\
&\equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

  donc : $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]\,.$

b) • *Une forme trigonométrique du complexe* z_B :

On a : $|z_B| = 2$, *donc*

$$z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

• *Déduisons que le point* B *appartient au cercle de centre* O *et rayon* 2 :

On considère (C) *le cercle de centre* O *et de rayon* 2*. Alors pour tout point* M *d'affixe* z *appartient à* (C) :

$$M \in (C) \iff OM = 2 \iff |z| = 2$$

et comme : $|z_B| = 2$, *donc* : $B \in (C)$.

c) *Construisons les points* B *et* C :

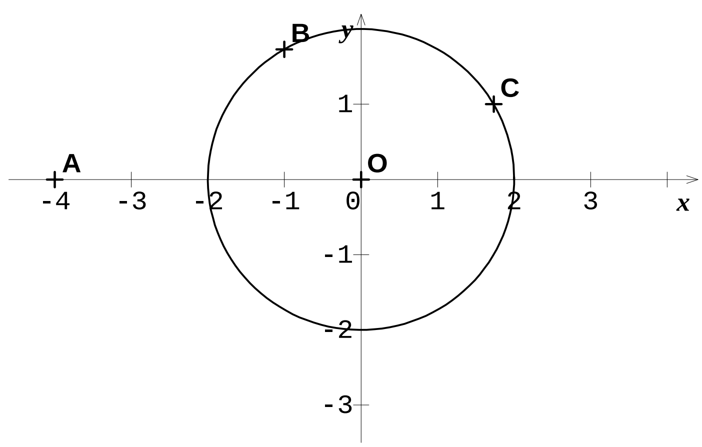
Déterminons une forme exponentielle des complexes z_B *et* z_C :

On a : $z_B = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

on a : $z_C = -iz_B = -i\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} + i$, *et* : $|z_C| = 2$, *donc* :

$$z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

d'où



2. *Soit* D *le point d'affixe* : $z_D = (1-i)z_B$.

a) *Montrons que le quadrilatère* $OCDB$ *est un carré.*

On a : $OB = |z_B| = 2$, *et* : $CD = |z_D - z_C| = |(1-i)z_B + iz_B| = |z_B(1 - i + i)| = |z_B| = 2$. *Donc* : $OB = CD$. *D'autre part, on a* : $OC = |z_C| = |-iz_B| = |z_B| = 2$ *et* $BD = |z_D - z_B| = |z_B| = 2$. *Donc* : $OC = BD$, *d'où on obtient* : $OB = CD = OC = BD$, *et comme* : $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. *On déduit que le quadrilatère* $OCDB$ *est un carré.*

b) *Montrons que :* $Aff(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{3}z_C$.

On a

$$\begin{aligned} Aff(\overrightarrow{AB}) &= z_B - z_A \\ &= -1 + i\sqrt{3} + 4 \\ &= 3 + i\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3^2} + i\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3} + i) \\ &= \sqrt{3}z_C \end{aligned}$$

c) *Déduisons que les points* A, B *et* D *sont alignés :*

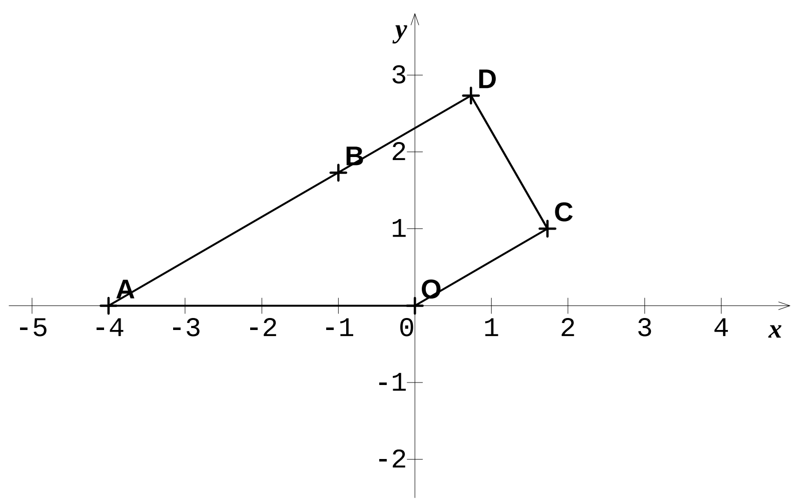
On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_A}{z_D - z_B} &= \frac{\sqrt{3}z_C}{(1-i)z_B - z_B}, \\ &= \frac{-\sqrt{3}iz_B}{z_B\,(1 - i - 1)} \\ &= \frac{-\sqrt{3}iz_B}{-iz_B} \\ &= \sqrt{3} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}$, *d'où les points* A, B *et* D *sont alignés.*

d) *Calculons l'aire du quadrilatère* $OADC$ *:*

Graphiquement on remarque que le quadrilatère $OADC$ *est un trapèze rectangle.*



Démontrons cette constatation !!

Pour montrer que le quadrilatère $OADC$ *est un trapèze il suffit de prouver que* *les droites (AD) et (OC) sont parallèles. Donc, montrons que :* $\frac{z_C - z_O}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{z_C - z_O}{z_D - z_A} &= \frac{z_C}{z_D - z_A} \\
&= \frac{-iz_B}{(1-i)z_B + 4} \\
&= \frac{\sqrt{3} + i}{3 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)\left(3 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})\right)}{\left(3 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})\right)\left(3 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})\right)} \\
&= \frac{4\sqrt{3} + 4}{8\sqrt{3} + 16} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ceci signifie que le quadrilatère $OADC$ est un trapèze rectangle.
Calculons l'aire du trapèze rectangle $OADC$:
On a :

$$\begin{aligned}
Aire &= \frac{(\textit{grande base} + \textit{petite base}) \times \textit{hauteur}}{2} \\
&= \frac{(AD + OC) \times DC}{2}
\end{aligned}$$

Calculons : AD, OC et DC :
On a : $AD = |z_D - z_A| = |(1-i)z_B + 4| = \left|(1-i)(-1 + i\sqrt{3}) + 4\right| = \left|3 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})\right| = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)$, *et :* $OC = |z_C| = 2$ *et* $DC = |z_C - z_D| = |-iz_B - (1-i)z_B| = |-z_B| = 2$. *Donc, on obtient :*

$$Aire = \frac{\left(2\left(\sqrt{3} + 1\right) + 2\right) \times 2}{2} = \left(2\sqrt{3} + 4\right) cm^2$$

Problème d'analyse 3 (11 *points*)

Partie N1 *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :* $g(x) = 1 + x \ln x$

1) *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$, $g'(x) = 1 + \ln x$.

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (1 + x \ln x)' \\
&= (1)' + (x \ln x)' \\
&= \ln x + x \times \frac{1}{x} \\
&= 1 + \ln x
\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $g'(x) = 1 + \ln x$.

2) *Dressons le tableau de variations de la fonction g :*

Soit $x \in]0,+\infty[$, on a

$$g'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$$

On a : $x \geq e^{-1} \iff \ln x \geq -1 \iff 1 + \ln x \geq 0 \iff g'(x) \geq 0$

et: $0 < x \leq e^{-1} \iff \ln x \leq -1 \iff 1 + \ln x \leq 0 \iff g'(x) \leq 0$

d'où

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

La justification des limites en 0 et $+\infty$:

$$\text{On a } \begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 1 + x\ln x = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} 1 + x\ln x = +\infty \end{cases}.$$

3) *Montrons que :* $(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ g(x) > 0$

D'apès la question précédente, on déduit que la fonction g admet une valeur minimale absolue en point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ sur $]0,+\infty[$. Donc on a : $(\forall x > 0)\,,\ g(x) \geq g\left(\dfrac{1}{e}\right)$ *et comme* $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$, *d'où :*

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\,, \quad g(x) > 0.$$

4) *Montrons que :* $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ (x-1)\ln x \geq 0.$

On distingue deux cas :

1er cas *Si :* $x \in]0,1]$, *alors :* $\begin{cases} \ln x \leq 0 \\ \\ x - 1 \leq 0 \end{cases}$ *donc* $(\forall x \in]0,1])\,, (x-1)\ln x \geq 0.$

2éme cas *Si :* $x \in [1,+\infty[$, *alors :* $\begin{cases} \ln x \geq 0 \\ \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$ *donc* $(\forall x \in [1,+\infty[)\,, (x-1)\ln x \geq 0.$

On déduit que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\,, \quad (x-1)\ln x \geq 0$

Partie N2 *On considère la fonction f définie par :* $f(x) = (\ln x)^2 + \dfrac{\ln x}{x} + 1.$

1)-a) *Déterminons* D_f*, puis calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$:

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R}/ \quad x > 0\} =]0, +\infty[$.

On a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (\ln x)^2 + 1 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (\ln x)^2 + \dfrac{\ln x}{x} + 1 = +\infty$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty.$$

b) *Montrons que* : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x) = -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow0^+} (\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x} + 1 \\ &= \lim_{x\longrightarrow0^+} \underbrace{(\ln x)^2}_{\searrow+\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{x\ln x}}_{\searrow-\infty} + \underbrace{\frac{1}{(\ln x)^2}}_{\searrow0} \right) = -\infty \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x) = -\infty$. *D'ou la courbe* (C_f) *admet une asymptote verticale d'équation* : $x = 0$.

2)-a) *La fonction* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x} + 1 \right)' \\ &= 2\frac{\ln x}{x} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2\ln x}{x} + \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2x\ln x - \ln x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x\ln x + x\ln x - \ln x + 1}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x).(x-1) + 1 + x\ln x}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)\ln x + g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)\ln x + g(x)}{x^2}$.

b) *Une équation de la tangente à la courbe* (C_f) *en point d'abscisse* 1 *est* : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ *et comme* $\begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ *donc* : $(\Delta) : y = x$.

c) *Montrons que* f *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$:

On a : $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)\ln x + g(x)}{x^2}$ *d'où le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $(x-1)\ln x + g(x)$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$, *on a* $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $(x-1)\ln x + g(x) > 0$ (*d'après la question la partie* 1) *d'où* $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $f'(x) > 0$.

Finalement la fonction f *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.

Déduisons le T.V de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3)-a) *Montrons que* : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

Soit $x \in]0, +\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{(\ln(\sqrt{x})^2)^2}{\sqrt{x}^2} \\
&= \frac{(2\ln(\sqrt{x}))^2}{\sqrt{x}^2} \\
&= \frac{4(\ln(\sqrt{x}))^2}{\sqrt{x}^2} \\
&= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2.
\end{aligned}$$

donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} 4\left(\dfrac{\ln X}{X}\right)^2 = 0$ $\left(\begin{array}{r} X = \sqrt{x} \\ x \longrightarrow +\infty \implies X \longrightarrow +\infty \end{array}\right.$

donc

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

b) *Déduisons que* : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln x)^2+\dfrac{\ln x}{x}+1}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

et comme $\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}$ *alors* $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x}=0$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

La courbe (C_f) *admet une branache parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

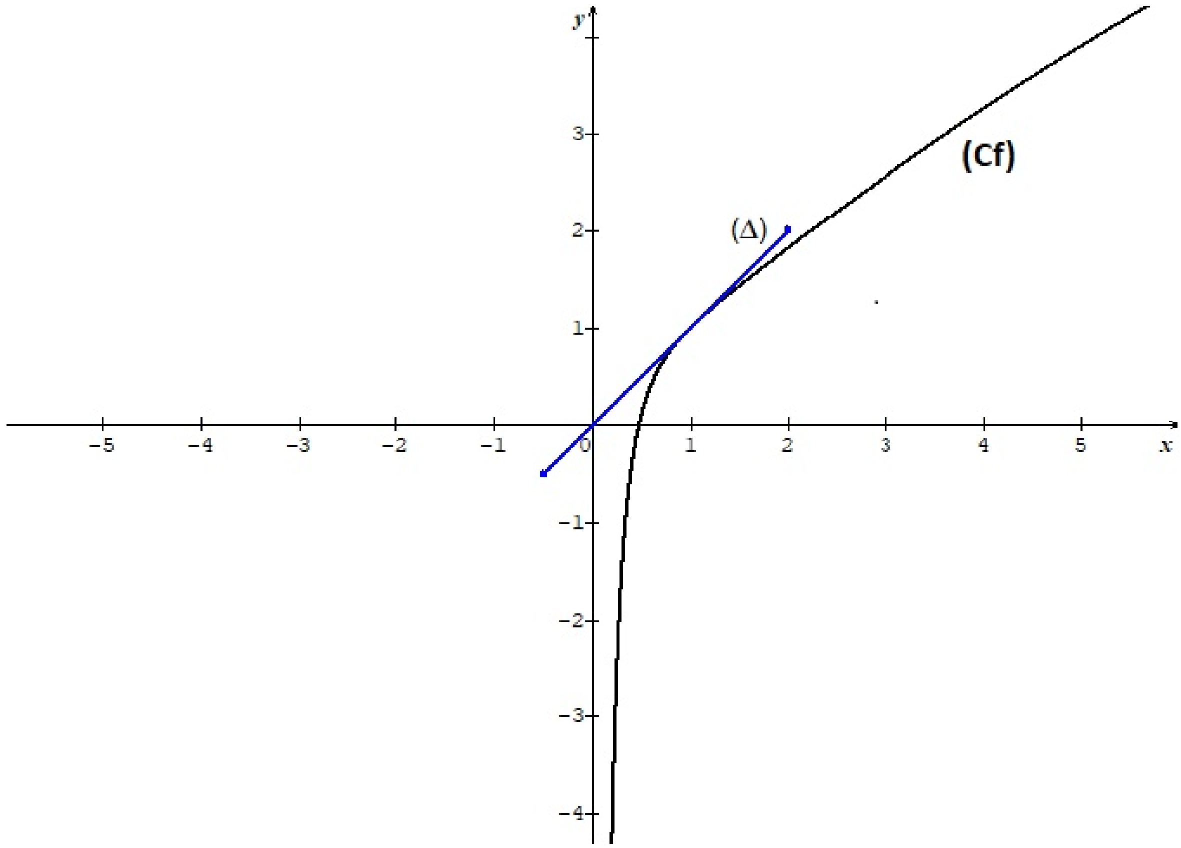
4)-a) *Montrons que l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution dans* $]0,+\infty[$:

La fonction f *est continue et strictement croissante sur* $]0,+\infty[$, *de plus* $f(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\longrightarrow0^+}f(x),\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$. *Comme* $0\in\mathbb{R}$, *alors on déduit que l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans l'intervalle* $]0,+\infty[$.

- *Vérifions que* : $\dfrac{1}{4}<\alpha<\dfrac{3}{4}$:

La fonction f *est continue sur* $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$, *et on a* : $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\left(\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)^2+\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)}{\dfrac{1}{4}}+1=-2,623365$ *et* $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\left(\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)^2+\dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)}{\dfrac{3}{4}}+1=0.699\,18$ *d'où* : $f\left(\dfrac{1}{4}\right)\times f\left(\dfrac{3}{4}\right)<0$. *Donc, d'après le T.V.I on a* : $\dfrac{1}{4}<\alpha<\dfrac{3}{4}$.

b) *La courbe* (C_f) :



5)-a) *La fonction f est continue et strictement croissante sur* $]0,+\infty[$, *donc elle admet une fonction réciproque notée* f^{-1} *définie sur l'ensemble* $J = f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

b) *Montrons que* f^{-1} *est dérivable en* 1 *et que :* $(f^{-1})'(1) = 1$.

On a : $f(1) = 1$, *puisque la fonction* f *est dérivable en* 1 *et* $f'(1) \neq 0$, *donc* f^{-1} *est dérivable en* 1, *d'où :*

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = 1$$

6)-a) *Calculons :* $I = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x} dx$:

On a : $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x} dx = \left[\dfrac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \left(\dfrac{\ln^2 e}{2} - \dfrac{\ln^2 1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ *donc*

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$$

b) *En utilisant une intégration par parties , montrons que :* $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$:

On pose :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = (\ln x)^2 \\ \\ v'(x) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} \\ \\ v(x) = x \end{array}\right.$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2\, dx &= \left[x.(\ln x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x dx \\ &= e - 2\int_1^e \ln x dx \end{aligned}$$

calculons l'intégrale : $\int_1^e \ln x dx$

On pose :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ \\ v'(x) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \\ v(x) = x \end{array}\right.$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= [x.\ln x]_1^e - 2\int_1^e 1dx \\ &= e - [x]_1^e \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où : $\int_1^e \ln x dx = 1$ *donc*

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

c) *Déduisons l'aire délimité entre* (C_f), *et* (Ox) *et les droites d'équations :* $x = 1$ *et* $x = e$.

La fonction f *est positive sur* $[1, e]$, *donc :*

$$Aire = \left(\int_1^e |f(x)|\, dx\right) ua = \left(\int_1^e f(x)dx\right) cm^2$$

Calculons : $\int_1^e f(x)dx$

On a

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x)dx &= \int_1^e (\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x} + 1dx \\ &= \int_1^e (\ln x)^2\, dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^e 1dx \\ &= (e-2) + \frac{1}{2} + e - 1 \\ &= 2e - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

donc

$$Aire = \left(2e - \frac{5}{2}\right) cm^2$$

7) *Graphiquement la courbe* (C_f) *est au-dessous de la droites* (Δ) *d'équation :* $y = x$ *sur* $]0, +\infty[$ *. donc :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), \quad f(x) \leq x$$

La courbe (C_f) *et la droite* (Δ) *se coupent en point d'abscisse* 1*. Donc l'équation* $f(x) = x$ *admet une unique solution* 1 *sur* $]0, +\infty[$ *.*

Partie N3 *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geq 1$.

Pour $n = 0$*, on a* $u_0 = 2$ *et comme* $u_0 \geq 1$ *alors la prposition est vraie pour* $n = 0$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* $u_n \geq 1$*, montrons que :* $u_{n+1} \geq 1$.

   On a $u_n \geq 1$*, et comme la fonction* f *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$ *alors* $f(u_n) \geq f(1)$*, d'où* $u_{n+1} \geq 1$.

   D'après le principe de récurrence on déduit que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1$$

2. *On a* $(\forall x \in]0, +\infty[)$ *,* $f(x) \leq x$ *et comme* $u_n \geq 1$*, alors* $f(u_n) \leq u_n$ *donc* $u_{n+1} \leq u_n$ *d'où*

   $$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

   d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

   Déduissons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et puisqu'elle est minorée par* 1*, alors elle est convergente.*

3. *Calculons :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$

   La fonction f *est continue sur* $[1, +\infty[$ *, et* $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$ *et la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :* $u_0 \in [1, +\infty[$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente sa limite* ℓ *vérifie* $\ell \geq 1$*, donc la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans l'intervalle* $[1, +\infty[$ *et comme* 1 *est l'unique solution de l'équation* $f(x) = x$ *sur* $[1, +\infty[$ *alors :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$.