www.etude-generale.com **2 BAC PC-SVT**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

CORRECTION DE LA SÉRIE

EXERCICE 1 .

1. *Soit g la fonction définie par :* $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln(x)$.

a) *Déterminons D_g et étudions les variations de g :*
On a : $D_g = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\} =]0, +\infty[$.
La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$g'(x) = \left(x^2 - 1 + 2\ln(x)\right)' = 2x + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x}$$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $g'(x) = \dfrac{2x^2+2}{x}$ *d'où* $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $g'(x) > 0$ *c'est-à-dire la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.*
Dressons le tableau de variations de f :

On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 2\ln(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

et $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} 2\ln(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) *Calculons $g(1)$, puis étudions le signe de $g(x)$:*
On a : $g(1) = 1 - 1 + 2\ln(1) = 0$.

On a la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et on a $g(1)=0$ alors

$$0 < x \leq 1 \Longrightarrow g(x) \leq g(1) \Longrightarrow g(x) \leq 0$$

$$x \geq 1 \Longrightarrow g(x) \geq g(1) \Longrightarrow g(x) \geq 0$$

donc $\begin{cases} (\forall x \in]0,1]), & g(x) \leq 0 \\ (\forall x \in [1,+\infty[), & g(x) \geq 0 \end{cases}$.

D'où le tableau de signe de g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

2. *Soit f la fonction définie par :* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}\ln(x)$

a) *Déterminons D_f puis calculons les limites de f aux bornes de D_f :*

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\} =]0,+\infty[$.

On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$

et $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = \text{"}\dfrac{-1}{0^+}\text{"} = -\infty \\ \lim\limits_{x\longrightarrow0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x) = +\infty.$

b) *Étudions les variations de f :*

La fonction f est dérivable sur D_f, et pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2-1}{x^2}\ln(x)\right)' \\
&= \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' \times \ln(x) + \frac{x^2-1}{x^2} \times \ln'(x) \\
&= \frac{(x^2-1)' \times x^2 - (x^2-1) \times (x^2)'}{x^4} \times \ln x + \frac{x^2-1}{x^2} \times \frac{1}{x} \\
&= \frac{2x \times x^2 - (x^2-1) \times 2x}{x^4} \times \ln x + \frac{x^2-1}{x^2} \times \frac{1}{x} \\
&= \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} \times \ln x + \frac{x^2-1}{x^3} \\
&= \frac{2x\ln x}{x^4} + \frac{x^3-x}{x^4} \\
&= \frac{x^3 - x + 2x\ln x}{x^4} \\
&= \frac{x\left(x^2 - 1 + 2\ln x\right)}{x^4} \\
&= \frac{x^2 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in D_f)\,,\ \ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
Déterminons le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$:
Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$. (car $(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ x^3 > 0$).
D'après la partie 1 on déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

b) *Étudions les branches infinies de (C_f) :*
On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, donc la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

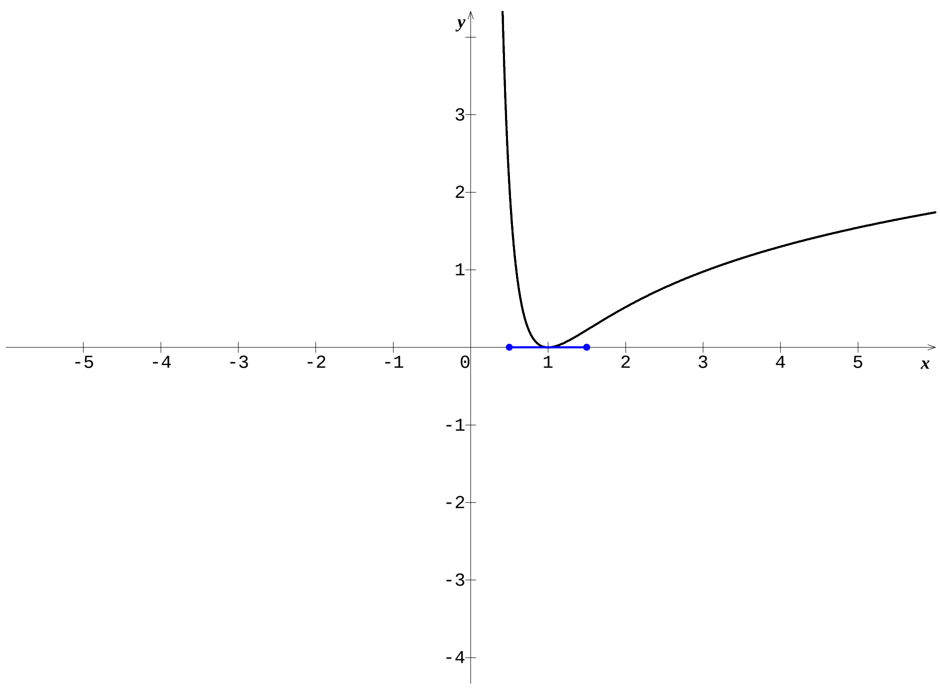
On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}\ln x}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2-1}{x^3}\ln x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\ln x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\ln x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x^2}\times\frac{\ln x}{x}
\end{aligned}$$

et comme : $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ *et* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ *alors* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x^2}\times\frac{\ln x}{x}=0$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$*. D'où la courbe* (C_f) *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$*.*

d) *Construction de la courbe* (C_f) *:*



EXERCICE 2 .

Soit f *la fonction définie par :* $f(x)=x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

1. *Déterminons* D_f *:*

   On a : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ x+1\neq 0\ \ et\ \ \frac{x-1}{x+1}>0\right\}$

Tableau de signes de $\frac{x-1}{x+1}$ *est le suivant :*

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

donc : $D_f = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.

2. *Montrons que* f *est impaire :*

   On a $(\forall x \in D_f)$, $-x \in D_f$.

   Soit $x \in D_f$, *on a*

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) \\ &= -x + \ln\left(\frac{-(x+1)}{-(x-1)}\right) \\ &= -x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\right) \\ &= -x + \ln(1) - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= -x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= -\left(x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

   donc $(\forall x \in D_f)$, $f(-x) = -f(x)$. *D'où la fonction* f *est impaire.*

3. *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)$ *:*

   ♣ *On a :* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{x} = 1$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{X\longrightarrow 1} \ln(X) = 0$ $\left(\begin{array}{c} X = \frac{x-1}{x+1} \\ x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow X \longrightarrow 1 \end{array}\right)$ *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x = +\infty$ *donc par somme on* *obtient* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

♣ *On a :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = 0^+ \quad \left((\forall x \in]1,+\infty[),\ \dfrac{x-1}{x+1} > 0\right)$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{X \longrightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty \quad \left(\begin{array}{c} X = \dfrac{x-1}{x+1} \\ x \longrightarrow 1^+ \Longrightarrow X \longrightarrow 0^+ \end{array}\right)$ *et comme* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} x = 1$ *donc par somme on obtient* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

4. *Vérifions que la droite d'équation* $y = x$ *est une asymptote de* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$ *:*

   On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - x = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 0$, *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. *Donc la droite d'équation* $y = x$ *est une asymptote de* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

5. **a)** *Montrons que :* $(\forall x \in D_f),\ \ f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

   La fonction $u : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ *est dérivable et strictement positive sur* D_f *alors la fonction* $v : x \longmapsto \ln(u(x))$ *est dérivable sur* D_f *et comme la fonction* $w : x \longmapsto x$ *est dérivable sur* D_f *donc la fonction* $f = w + v$ *est dérivable sur* D_f. *Pour tout*

$x \in D_f$, *on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)' \\
&= 1 + \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}} \\
&= 1 + \frac{\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} \\
&= 1 + \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2 \times \frac{x-1}{x+1}} \\
&= 1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)} \\
&= 1 + \frac{2}{x^2-1} \\
&= \frac{x^2+1}{x^2-1}
\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in D_f)\,, \;\; f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}.$

b) *Dressons le tableau de variations de* f :

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* x^2-1 *sur* D_f *(car* $(\forall x \in D_f)\,, \; x^2+1>0)$

On a

$x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0 \iff x-1=0 \;\; ou \;\; x+1=0 \iff x=1 \; ou \; x=-1$

Le tableau de signe de x^2-1 *est* :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

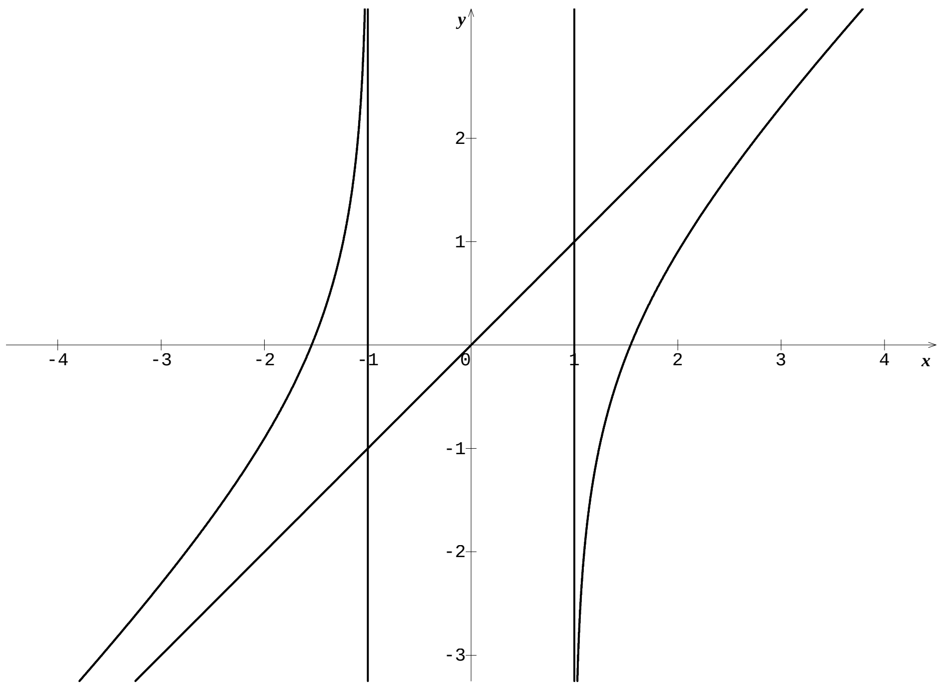
Le tableau de variations de f *est le suivant* :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. *Montrons que (C_f) coupe l'axe des abscisses en point d'abscisse α compris entre $\dfrac{3}{2}$ et 2 :*

La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ et on a $\begin{cases} f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \ln 5 \\ f(2) = 2 \end{cases}$ *donc $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \times f(2) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe au moins $\alpha \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en point d'abscisse α compris entre $\dfrac{3}{2}$ et 2*

7. *La construction de (C_f) :*



8. *Soit g la restriction de f sur $]1, +\infty[$.*

Montrons que g admet une fonction réciproque d'un intervalle qu'il faut déterminer

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ alors elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(]1, +\infty[)$.

On a

$$J = g(]1, +\infty[) = \left]\lim_{x\longrightarrow 1^+} g(x), \lim_{x\longrightarrow +\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

EXERCICE 3 .

On considère la fonction f définie sur $]0, 2[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$.

1. **a)** *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x}{2-x} = 0^+$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right) = \lim\limits_{X \longrightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$, *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} 2-x = 0^+$ $(x \longrightarrow 2^- \Longrightarrow x < 2 \Longrightarrow 2-x > 0)$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x}{2-x} = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right) = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.

b) *La fonction* $u : x \longmapsto \dfrac{x}{2-x}$ *est dérivable et strictement positive sur* $]0,2[$ *donc la fonction* $f = \ln(u)$ *est dérivable sur* $]0,2[$. *Pour tout* $x \in]0,2[$, *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)' \\ &= \frac{\left(\dfrac{x}{2-x}\right)'}{\dfrac{x}{2-x}} \\ &= \frac{\dfrac{(x)'(2-x) - x(2-x)'}{(2-x)^2}}{\dfrac{x}{2-x}} \\ &= \frac{2-x-x\times(-1)}{(2-x)^2 \times \dfrac{x}{2-x}} \\ &= \frac{2}{x(2-x)} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]0,2[)$, $f'(x) = \dfrac{2}{x(2-x)}$.

c) *Dressons le tableau de variations de* f :

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $2-x$ *sur* $]0,2[$ (*car* $(\forall x \in]0,2[)$, $x > 0$)

On a : $2-x = 0 \Longleftrightarrow x = 2$ *donc*

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

d'où le tableau de variations de f :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 2
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

d) *Une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) est :*

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ et comme } \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 0 \end{cases} \text{ donc } (T) : y = 2x - 2.$$

2. On pose $(\forall x \in]0,2[)$, $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) *Montrons que :* $\begin{cases} \varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0 \\ \varphi\left(\dfrac{7}{4}\right) > 0 \end{cases}$

On a : $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{2}$ *et comme* $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}\right) = \ln(3) = 1,1$

donc $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) = -0,4$ *d'où* $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$.

On a : $\varphi\left(\dfrac{7}{4}\right) = f\left(\dfrac{7}{4}\right) - \dfrac{7}{4}$ *et comme* $f\left(\dfrac{7}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{\frac{7}{4}}{2-\frac{7}{4}}\right) = \ln(7) = 1,94$

donc $\varphi\left(\dfrac{7}{4}\right) = 0,19$ *d'où* $\varphi\left(\dfrac{7}{4}\right) > 0$.

b) *Déduisons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α telle que :* $\dfrac{3}{2} < \alpha < \dfrac{7}{4}$

La fonction φ est continue sur $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}\right]$ *et comme* $\begin{cases} \varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0 \\ \varphi\left(\dfrac{7}{4}\right) > 0 \end{cases}$ *alors* $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \times \varphi\left(\dfrac{7}{4}\right) < 0$ *donc d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe au moins*

$\alpha \in \left]\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right[$ *tel que* $\varphi(\alpha) = 0$ *d'où l'équation* $f(x) = x$ *admet au moins une solution* α *dans* $\left]\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right[$.

Interprétation graphique

La courbe (C_f) *coupe la droite d'équation* $y = x$ *en point* $I(\alpha, \alpha)$.

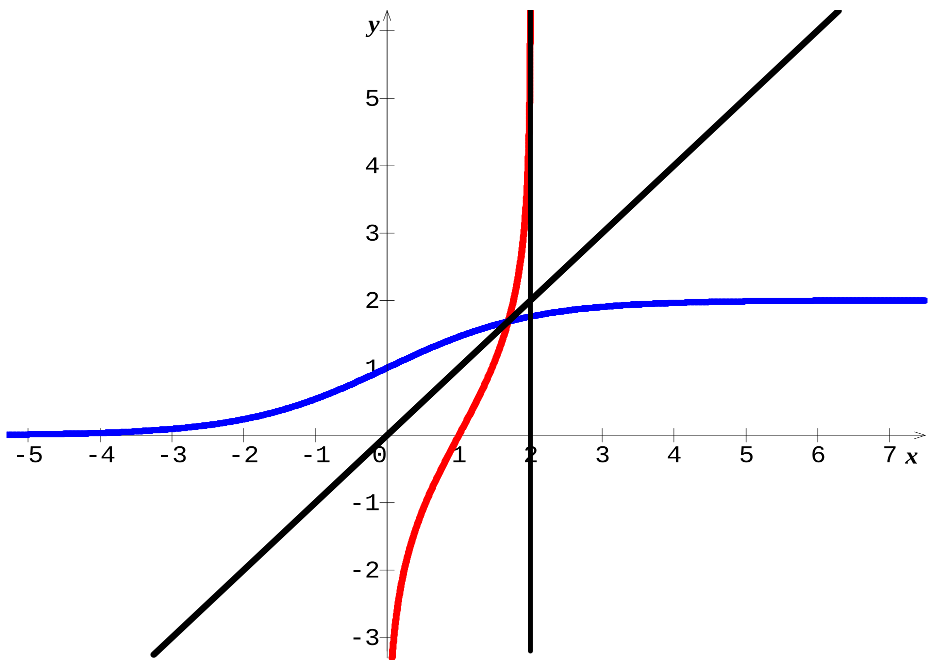
c) *Montrons que* f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* J :

La fonction f *est continue et strictement croissante sur* $]0,2[$ *alors elle admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* $J = f(]0,2[)$.

On a

$$J = f(]0,2[) = \left]\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

3. *La construction de* (C_f) *et* $(C_{f^{-1}})$:



La courbe en rouge présente la fonction f *et en blue présente la fonction* f^{-1}

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com