CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N2

EXERCICE 1 .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

1. **a)** *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)$:

On a : $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{3} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 2 - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

et : $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{3} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} x = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} 2 - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = +\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

b) *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, *alors* (C_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = 0$.

2. Montrons que : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = 3$.

■ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow +\infty} 2 - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty} 2 - \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty} 2 - \frac{x\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty} 2 - \sqrt{1+\frac{3}{x^2}}
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} 1+\dfrac{3}{x^2} = 1$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}} = 1$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = 1$. *Donc la courbe* (C_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = 1$ *au voisinage de* $+\infty$.

■ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 2 - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 2 - \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 2 + \frac{x\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 2 + \sqrt{1+\frac{3}{x^2}} = 3
\end{aligned}$$

donc $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 3$. *Donc la courbe* (C_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = 3$ *au voisinage de* $-\infty$.

3. **a)** *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ f'(x) = \dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\quad f'(x) &= \left(2 - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\right)' \\
&= -\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)' x - \sqrt{x^2+3}}{x^2}\right) \\
&= -\left(\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} \times x - \sqrt{x^2+3}}{x^2}\right) \\
&= -\left(\frac{\dfrac{x^2-(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2}\right) \\
&= \frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}
\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ f'(x) = \dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$.

b) *Dressons le tableau de variation de* f *:*

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ f'(x) > 0$ *donc*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f	3	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	1

c) *Une équation de la tangente* (T_1) *au point d'abscisse* $x_1 = 1$ *est* $y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$ *et comme* $\begin{cases} f'(1) = \dfrac{3}{2} \\ f(1) = 0 \end{cases}$ *donc* $(T_1) : y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

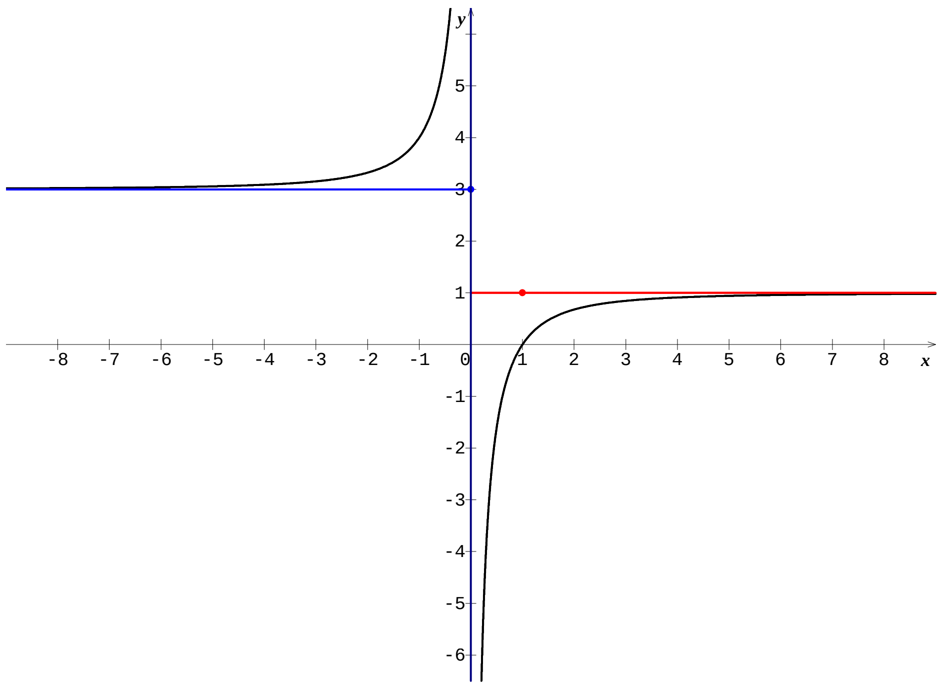
Une équation de la tangente (T_2) *au point d'abscisse* $x_2 = -1$ *est* $y = f'(-1)\,(x-1) + f(-1)$ *et comme* $\begin{cases} f'(-1) = \dfrac{3}{2} \\ f(-1) = 4 \end{cases}$ *donc* $(T_2) : y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$.

4. On cherche les points d'intersection de la courbe (C_f) *et l'axe des abscisses.*
Résolvons dans $\mathbb{R}^*$ *l'équation* $(E) : f(x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ *, on a*

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 2 - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = 0 \\
&\iff \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = 2 \\
&\iff \sqrt{x^2+3} = 2x \\
&\iff x^2 + 3 = 4x^2 \quad et \quad x > 0 \\
&\iff -3x^2 + 3 = 0 \quad et \quad x > 0 \\
&\iff x^2 - 1 = 0 \qquad et \quad x > 0 \\
&\iff (x-1)\,(x+1) = 0 \quad et \quad x > 0 \\
&\iff (x = 1 \quad ou \quad x = -1\ ) \quad et\ x > 0 \\
&\iff x = 1
\end{aligned}$$

Donc: $(C_f) \cap (Ox) = \{A\,(1,0)\}$

5. *La courbe* (C_f) *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



EXERCICE 2 .

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 1 - x + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1. *Calculons :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$:

■ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 - x + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 - x + \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$ *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

■ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 1 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 1 - x - \frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} 1 - x - \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = +\infty
\end{aligned}$$

donc $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a)** *Montrons que :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - (2-x)$:

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - (2-x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 2 + x \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} -1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0
\end{aligned}$$

donc $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - (2-x) = 0$. *D'où la courbe* (C_f) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une asymptote oblique* (D) *d'équation* $y = 2 - x$.

b) *Montrons que* (C_f) *est au dessous de* (D) *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$:

Soit $x \in [0, +\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}
f(x) - (2-x) &= 1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 2 + x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}
\end{aligned}$$

donc: $(\forall x \in [0, +\infty[)\,, \quad f(x) - (2-x) < 0$ *d'où* $(\forall x \in [0, +\infty[)\,, \quad f(x) < (2-x)$ *. C'est-à-dire la courbe* (C_f) *est au dessous de* (D) *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

3. **a)** *Montrons que :* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)+x=0$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)+x &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 1-x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+x\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)+x=0$. *D'où la courbe* (C_f) *admet au voisinage de* $-\infty$ *une asymptote oblique* (Δ) *d'équation* $y=-x$.

b) *Étudions la position relative de* (C_f) *par rapport à* (Δ) *sur l'intervalle* $]-\infty,0]$.

Soit $x\in]-\infty,0]$, *on a*

$$\begin{aligned}
f(x)-(-x) &= 1-x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+x\\
&= 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}\\
&= \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}
\end{aligned}$$

et comme : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ *alors :* $\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)>0$ *donc:* $(\forall x\in]-\infty,0])$, $f(x)-(-x)>0$ *d'où* $(\forall x\in]-\infty,0])$, $f(x)>-x$. *C'est-à-dire la courbe* (C_f) *est au dessus de* (Δ) *sur l'intervalle* $]-\infty,0]$.

4. **a)** *Montrons que :* $(\forall x\in\mathbb{R})$, $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}-1$

La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f\,'(x) &= \left(1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' \\
&= -1 + \frac{\sqrt{1+x^2} - x \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} \\
&= -1 + \frac{\dfrac{(1+x^2) - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} \\
&= -1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} - 1
\end{aligned}
$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} - 1.$

b) *On a* $f'(0) = \dfrac{1}{(1+0)\sqrt{1+0}} - 1 = 0.$

Justifions que f *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

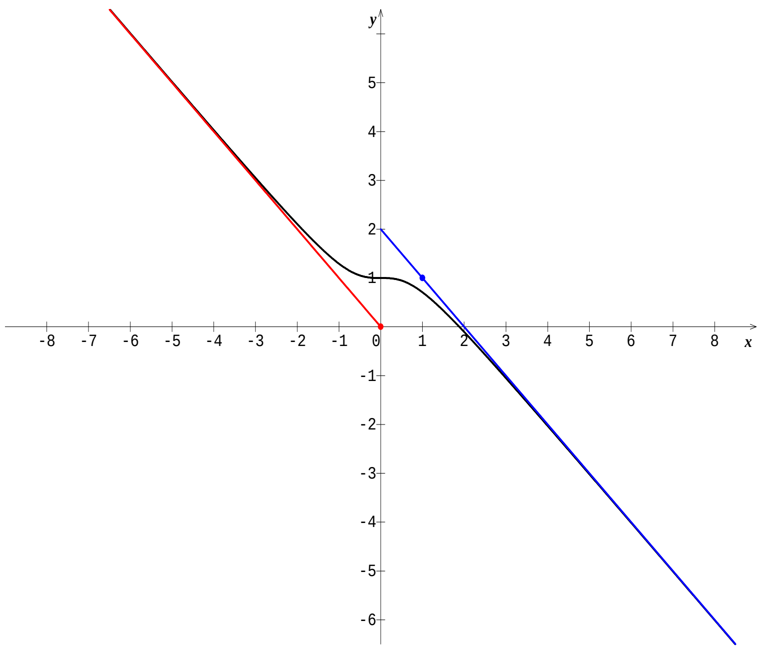
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{1 - (1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\left[1 - (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]\left[1 + (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\left[1 + (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]} \\
&= \frac{1 - (1+x^2)^2(1+x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\left[1 + (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]} \\
&= \frac{1 - (1+x^2)^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\left[1 + (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]} \\
&= -\frac{x^2\left[1 + (1+x^2) + (1+x^2)^2\right]}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\left[1 + (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]}
\end{aligned}
$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\quad f'(x) \leq 0$ (f' *s'annule uniquement en* 0). *Alors la fonction* f *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.

c) *Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

5. La courbe (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com