www.etude-generale.com **2 BAC PC**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

DEVOIR SURVEILLÉ

EXERCICE 1 .

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,+\infty[$ *par :* $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$

1. *Calculons* $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$:

   On a $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^3+1=\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^3=+\infty$ *alors* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}=+\infty$ *d'où* $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$.

2. *Montrons que la droite* (D) *d'équation* $y=x$ *est une asymptote oblique de* (C_f) :

   montrons que : $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-x)=0$.

   On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(x^3+1)-x^3}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^3}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^3}\end{aligned}$$

   et comme $\begin{cases}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}=+\infty\\ \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}=+\infty\\ \lim_{x\longrightarrow+\infty}x^3=+\infty\end{cases}$ *alors* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^3=+\infty$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^3}=0$ *c'est-à-dire* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-x)=0$

   d'où la droite (D) *d'équation* $y=x$ *est une asymptote oblique de* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

3. *Étudions la dérivabilité de* f *à droite de* -1 :

On a : $f(-1)=0$ *alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x+1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^+}\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{(x+1)^3}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^+}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^3}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^+}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}}
\end{aligned}$$

et comme $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} x^2-x+1=3\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(x+1)^2=0^+\end{array}\right.$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}}=+\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$, *c'est-à-dire la fonction* f *n'est pas dérivable à droite en* $x_0=-1$*. La courbe* (C_f) *admet une demi-tangente à droite en* $A(-1,0)$ *dirigé vers le haut.*

4. **a)** *Calculons* $f'(x)$ *pour tout* $x\in\left]-1,+\infty\right[$ *:*

La fonction f *est dérivable sur* $\left]-1,+\infty\right[$ *et pour tout* $x\in\left]-1,+\infty\right[$, *on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)'\\
&= \frac{(x^3+1)'}{3\left(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\right)}\\
&= \frac{3x^2}{3\left(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\right)}\\
&= \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}
\end{aligned}$$

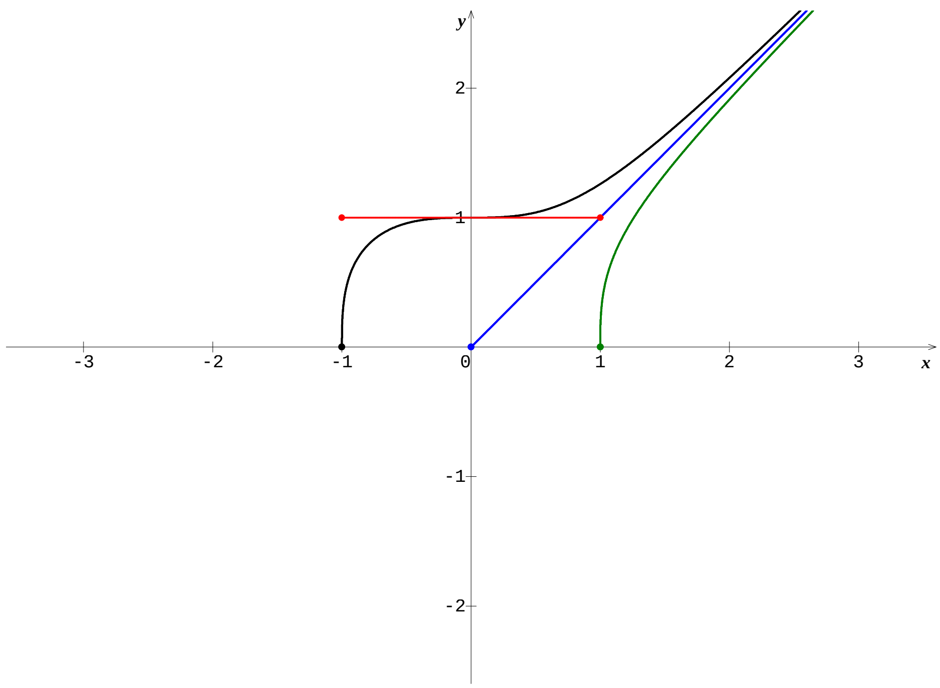
donc $\left(\forall x\in\left]-1,+\infty\right[\right)$, $f'(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$.

b) *Dressons le tableau de variations de* f *:*

On a $(\forall x \in]-1,+\infty[)\,,\ f'(x) \geq 0$ *d'où*

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. *La courbe* (C_f) :



6. *Soit* g *la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $g(x) = f(x)\,.$

   a) *Montrons que* g *admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle* J :
   La fonction g *est continue et strictement croissante sur* $[0,+\infty[$ *alors elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle* $J = g(I)\,.$ *On a*

$$J = g(I) = g([0,+\infty[) = \left[g(0)\,,\ \lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x)\right[= [1,+\infty[$$

   b) *Déterminons* $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$:
   Soit $x \in [1,+\infty[$ *et* $y \in [0,+\infty[$ *avec* $y = g^{-1}(x)\,.$

On a

$$\begin{aligned} y &= g^{-1}(x) \\ &\Longleftrightarrow g(y) = x \\ &\Longleftrightarrow \sqrt[3]{y^3+1} = x \\ &\Longleftrightarrow y^3+1 = x^3 \\ &\Longleftrightarrow y^3 = x^3 - 1 \\ &\Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3-1} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in [1, +\infty[)$, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$

c) *La courbe* $(C_{g^{-1}})$ *est symétrique par rapport à la droite* $y = x$ (*voir la question* 5).
(*la courbe* $(C_{g^{-1}})$ *en verte*).

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com