www.etude-generale.com 1ère BAC S-EXP
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

# SUITES NUMÉRIQUES

## Généralité sur les suites numériques

### Définition et Notation

**Définition 1** .

*Une suite numérique $u$ est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ ou une de ses parties. À la variable entière $n$, on associe le nombre $u(n)$ appelé terme de rang $n$ de la suite $u$. On a donc $u : n \longmapsto u(n)$. On note souvent $u_n$ le terme de rang $n$ ou le terme général de la suite $u$.*

**Notation**

Lorsque la suite $u$ est définie sur $\mathbb{N}$, $u$ se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)$.

Lorsque la suite $u$ est définie sur $\mathbb{N}^*$, $u$ se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$ .

**Exemple 2** .

♣

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto 2n+1$$

*se note par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = 2n+1$ et son premier terme est $u_0 = 1$.*

**Exemple 3**

$$v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto 1+\frac{2}{n}$$

*se note par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $v_n = 1+\dfrac{2}{n}$ et son premier terme est $v_1 = 2$.*

♣

$$w : \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto \frac{n+2}{n(n-1)}$$

*se note par $(w_n)_{n\geq 2}$ où $w_n = \dfrac{n+2}{n(n-1)}$ et son premier terme est $w_2 = 2$.*

## Deux façon de définir une suite

### Suite définies par la donnée explicite de leurs termes

**Définition 4** .

*Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie de façon explicite si le terme général* $u_n$ *s'exprime en fonction de* $n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n) \quad \text{où } f \text{ est une fonction numérique}$$

**Exemple 5** .

♣ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n = 2n+3.$

*On a donc* $u_0 = 3,\ \ u_1 = 5$ *et* $u_2 = 7$.

♣ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_n = \dfrac{2}{n}$

*On a donc* $u_1 = 2,\ \ u_2 = 1$ .

### Par récurrence

**Définition 6** .

*On s'intéresse dans cette leçon aux suites définies par récurrence, c'est-à-dire les suites définies par donnée du premier terme (ou des premiers termes) et une relation dite de récurrence, qui permet de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.*

**Exemple 7** .

■ *On donne la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,, \quad u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

*Déterminer* $u_1, u_2, u_3$ *et* $u_4$.

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 - 2 = 3\times 2 - 2 = 4 \\ u_2 &= 3u_1 - 2 = 3\times 4 - 2 = 10 \\ u_3 &= 3u_2 - 2 = 3\times 10 - 2 = 28 \\ u_4 &= 3u_3 - 2 = 3\times 28 - 2 = 82 \end{aligned}$$

■ *On donne la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} v_0 = 2\ ,\ v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$

*Déterminer $v_2, v_3$ et $v_4$.*

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + v_0 = 2 + 1 = 3 \\ v_3 &= v_2 + v_1 = 3 + 1 = 4 \\ v_4 &= v_3 + v_2 = 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

## Monotonie d'une suite

**Définition 8** .
*Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique ($I \subset \mathbb{N}$).*

■ *La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si :* $\forall (n,p) \in I^2,\ \ n > p \Longrightarrow u_n \geq u_p$.

■ *La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si :* $\forall (n,p) \in I^2,\ \ n > p \Longrightarrow u_n \leq u_p$.

■ *La suite $(u_n)_{n\in I}$ est constante si :* $\forall (n,p) \in I^2,\ \ u_n = u_p$.

**Propriété 9** .
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

■ *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.*

■ *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.*

■ *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$,*

■ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite positive (respectivement négative) si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (respectivement $u_n \leq 0$) .*

La remarque suivante est très souvent utile lorsqu'on étudie la monotonie d'une suite.

**Remarque 10** .
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

♣ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (rspectivement $u_{n+1} - u_n \leq 0$)*

♣ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement positive, alors $(u_n)$ est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (respectivement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$).*

**Exemple 11** .

■ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = \frac{5n-3}{2n+7}$$

*Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7} - \frac{5n-3}{2n+7} \\
&= \frac{5n+5-3}{2n+2+7} - \frac{5n-3}{2n+7} \\
&= \frac{5n+2}{2n+9} - \frac{5n-3}{2n+7} \\
&= \frac{(5n+2)(2n+7) - (5n-3)(2n+9)}{(2n+9)(2n+7)} \\
&= \frac{41}{(2n+9)(2n+7)}
\end{aligned}$$

*comme* $\dfrac{41}{(2n+9)(2n+7)} > 0$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

*donc la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

■ *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \qquad v_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}.$$

*Tous les termes de la suite sont strictements positifs.*

*Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\dfrac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}} \\
&= \frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
&= \frac{2^{3n} \times 2^3}{3^{2n} \times 3^2} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
&= \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

*comme* $\dfrac{8}{9} < 1$, *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$$

*donc la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

**Exemple 12** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n\in\mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n+4}{4u_n+6} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ \ u_n \geq 1$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

♠ *Pour* $n=0$, *on a* $u_0 = 4$ *alors* $u_0 \geq 1$.

*Soit* $n\in\mathbb{N}$ *supposons que* $u_n \geq 1$ *et montrons que* $u_{n+1}\geq 1$.

*On a*

$$\begin{aligned} u_{n+1}-1 &= \frac{6u_n+4}{4u_n+6}-1 \\ &= \frac{6u_n+4-4u_n-6}{4u_n+6} \\ &= \frac{2u_n-2}{4u_n+6} \\ &= \frac{u_n-1}{2u_n+3} \end{aligned}$$

*comme* $u_n\geq 1$ *alors* $u_n-1\geq 0$ *et* $2u_n+3>0$ *donc* $u_{n+1}-1\geq 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1}\geq 1$.

*D'où, d'après le principe de récurrence*

$$(\forall n\in\mathbb{N})\,,\quad u_n\geq 1$$

♠ *Soit* $n\in\mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{6u_n+4}{4u_n+6}-u_n \\ &= \frac{4-4u_n^2}{4u_n+6} \\ &= \frac{2-2u_n^2}{2u_n+3} \end{aligned}$$

*on a déjà vu que* $2u_n+3>0$ *et comme* $u_n\geq 1$ *alors* $u_n^2\geq 1$ *donc* $2-2u_n^2\leq 0$ *par suite*

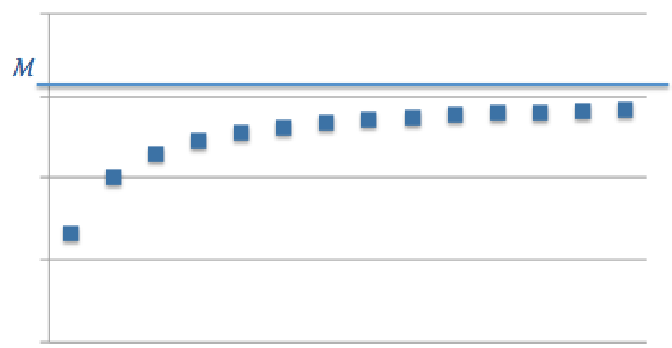
$$(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ u_{n+1}-u_n\leq 0$$

*donc la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

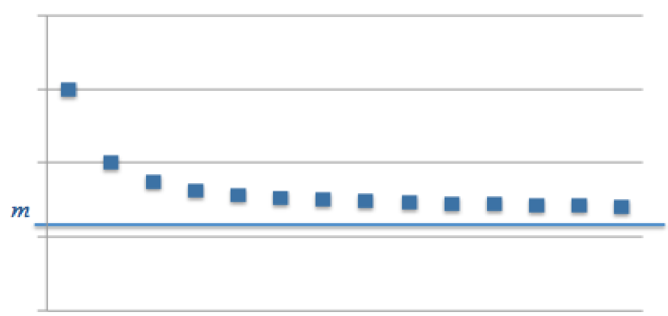
# Suites majorées, suites minorées, suites bornées

**Définition 13** .

■ *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée s'il existe un réel* $M$ *tel que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.




■ *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée s'il existe un réel* $m$ *tel que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.




■ *Une suite à la fois minorée et majorée est dite suite bornée.*

**Remarque 14** .

■ *Les suites de terme général* $\cos n$ *ou* $(-1)^n$ *sont bornées.*

■ *La suites de terme général* $n^2$ *est minorée par* 0.

**Exemple 15** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}$$

*Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \iff 1 \leq 2+\cos n \leq 3$$

*et*

$$-1 \leq \sin\sqrt{n} \leq 1 \iff 2 \leq 3-\sin\sqrt{n} \leq 4 \iff \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\sin\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

*donc*
$$\frac{1}{4} \leq \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}$$
*d'où*
$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$$
*ceci signifie que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

**Exemple 16** *.*

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*
$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; u_n = 3n^2 + 6n - 4$$
*Monrtrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par* $-7$.

♣ *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*
$$\begin{aligned} u_n + 7 &= 3n^2 + 6n - 4 + 7 \\ &= 3n^2 + 6n + 3 \\ &= 3\left(n^2 + 2n + 1\right) \\ &= 3\,(n+1)^2 \end{aligned}$$
*comme* $3\,(n+1)^2 \geq 0$ *donc*
$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; u_n \geq -7$$
*d'où la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par* $-7$.

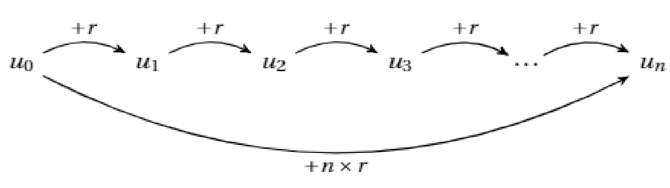
# Suites arithmétiques

## Définition des suites arithmétiques

**Définition 17** *.*

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.*

*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique si et seulement si il existe un réel* $r$ *tel que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$, *le nombre* $r$ *s'appelle alors la raison de la suite arithmétique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.




Autrement dit :

Une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre $r$.

## Comment reconnait-on une suite arithmétique ?

**Propriété 18 .**

*Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a alors :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+1} - u_n = r$$

**Exemple 19 .**

*Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.*

*On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques.*

*Soit $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 3 - (2n+3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

*donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+1} - u_n = 2$$

*Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.*

## Expression du terme général en fonction de $n$

**Propriété 20 .**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$.*

■
$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = u_0 + nr$$

■
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)\,r$$

**Démonstration 21 .**

■ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$.*

*Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = u_0 + nr$.*

- *$u_0 + 0 \times r = u_0$ et donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = u_0 + nr$ et montrons que $u_{n+1} = u_0 + (n+1)\,r$.*

  *On a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \quad \textit{(d'après la définition de la suite arithmétique)} \\ &= u_0 + nr + r \\ &= u_0 + (n+1)\,r \end{aligned}$$

- *D'après le principe de récurrence on déduit que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = u_0 + nr$$

■ *Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels.* $u_n = u_0 + nr$ *et* $u_p = u_0 + pr$. *Donc*

$$u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = nr - pr = (n-p)r$$

*donc*

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)\, r$$

**Exemple 22** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de premier terme* $u_0 = 3$ *et de raison* $r = 5$.
*Donner* $u_n$ *en fonction de* $n$.
*On a*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = u_0 + nr$$

*donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = 3 + 5n$$

**Exemple 23** .

*Considérons la suite arithmétique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que :* $u_5 = 7$ *et* $u_9 = 19$.

1. *Déterminer la raison et le premier terme de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *Exprimer* $u_n$ *en fonction de* $n$.

■ *On exprime* $u_9$ *en fonction de* $u_5$*, on a alors :*

$$u_9 = u_5 + (9-5)\, r \iff 19 = 7 + 4r \iff 12 = 4r \iff r = \frac{12}{4} = 3.$$

*On peut alors trouver* $u_0$.

$$u_5 = u_0 + 3 \times 5 \iff u_0 = 7 - 15 = -8$$

■ *On exprime* $u_n$ *en fonction de* $n$ *:*

$$u_n = 3n - 8$$

## Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

**Propriété 24** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique. Soient* $n$ *et* $p$ *deux entiers naturels tels que* $p \leq n$

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + ... + u_n &= \frac{(\textit{premier terme} \ + \ \textit{dernier terme}) \times (\textit{nombre de termes})}{2} \\ &= \left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)(n - p + 1) \end{aligned}$$

**Remarque 25** .

*Si* $p = 0$ *alors* $u_0 + u_1 + ... + u_n = \dfrac{(u_0 + u_n)}{2} \times (n+1)$.

**Exemple 26** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de premier terme* $u_0 = 3$ *et de raison* $r = 5$.
*On a*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = 3 + 5n$$

*Calculons* $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ *en fonction de* $n$.
*On a*

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)(n+1) \\ &= \left(\frac{3+3+5n}{2}\right)(n+1) \\ &= \left(\frac{6+5n}{2}\right)(n+1) \end{aligned}$$

**Exemple 27** $\left(\textit{Avec le symbole } \sum\right)$.

*Calculer les sommes suivantes* :

$$\sum_{k=33}^{67} k \quad , \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \quad avec \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad et \sum_{k=0}^{n}(3k+2) \quad avec \quad (n \in \mathbb{N}).$$

■

$$\begin{aligned} \sum_{k=33}^{67} k &= 33 + 34 + 35 + ... + 67 \\ &= \frac{(33+67) \times (67-33+1)}{2} \\ &= 1750 \end{aligned}$$

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 \\ &= \frac{(1 + (2n-1)) \times n}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(3k+2) &= 2 + 5 + 8 + 11 + ... + 3n + 2 \\ &= \frac{(2 + 3n + 2) \times (n+1)}{2} \\ &= \frac{(3n+4)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

**Exercice d'application 28** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n} \end{cases}$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel* $n$, $1 \leq u_n < 2$.
2. *Pour tout entier naturel* $n$, *on pose :* $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

   **a)** *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.*

   **b)** *Déterminer* $v_n$ *en fonction de* $n$.

   **c)** *En déduire* $u_n$ *en fonction de* $n$.

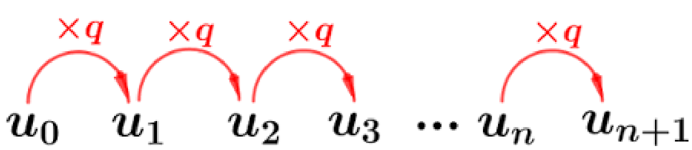
# Suites géométriques

## Définition des suites géométriques

**Définition 29** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.*

*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique si et seulement si il existe un réel* $q$ *tel que pour tout entier naturel* $n$, $u_{n+1} = q \times u_n$, *le nombre* $q$ *s'appelle alors la raison de la suite géométrique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .




Autrement dit :

Une suite est géométrique si et seulement si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un nombre réel $q$, toujours le même.

## Comment reconnait-on une suite géométrique

Pour montrer qu'une suite est géométrique, il faut donc montrer qu'il existe un nombre réel non nul $q$ indépendant de $n$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = qu_n$$

Autrement dit le rapport entre deux termes consécutifs est constant. On a alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

**Exemple 30** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $u_n = 3\times 2^n$.
*Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.*

■ *Soit* $n\in\mathbb{N}$, *on a* $u_n \neq 0$ *alors*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n} = 2$$

*donc*

$$(\forall n\in\mathbb{N}),\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$$

*On en déduit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $2$, *son premier terme est* $u_0 = 3$.

**Remarque 31** .

*Pour montrer qu'une suite est géométrique, il ne suffit pas de vérifier que, le quotient* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *est constant sur les premiers termes de la suite.*

## Expression du terme général en fonction de $n$

**Propriété 32** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $q$ $(q\neq 0)$.

■

$$(\forall n\in\mathbb{N}),\quad u_n = u_0\times q^n$$

■

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad u_n = u_p\times q^{n-p}$$

**Démonstration 33** .

■ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison non nulle* $q$.

*Montrons par récurrence que :* $(\forall n\in\mathbb{N})$, $u_n = u_0\times q^n$.

- *Puisque* $q\neq 0$, $q^0 = 1$ *puis* $u_0\times q^0 = u_0$ *et donc l'égalité est vraie pour* $n = 0$.
- *Soit* $n\in\mathbb{N}$. *Supposons que* $u_n = u_0\times q^n$ *et montrons que :* $u_{n+1} = u_0\times q^{n+1}$.

  *On a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n\times q \\ &= u_0\times q^n\times q \\ &= u_0\times q^{n+1} \end{aligned}$$

- *D'après le principe de récurrence on déduit que pour tout entier naturel* $n$, $u_n = u_0\times q^n$.

■ *Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels.*

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ et } \; u_p = u_0 \times q^p$$

- *Si $u_0 = 0$, on a $u_n = u_p = 0$, alors : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.*
- *Si $u_0 \neq 0$, alors $u_p \neq 0$. On peut écrire*

$$\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p}$$

*donc*

$$\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

**Exemple 34** .

*Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q$. On donne : $u_7 = 4374$ et $u_5 = 486$. Trouver la raison $q$ et le premier terme $u_0$ et $u_{10}$ sachant que la raison est positive.*

■ *On exprime $u_5$ en fonction de $u_7$, on a alors :*

$$u_7 = q^{7-5} \times u_5 \iff 4374 = q^2 \times 486 \iff q^2 = \frac{4374}{486} = 9 \iff q = 3 \text{ ou } q = -3$$

*On obtient les deux solutions : $q = 3$ ou $q = -3$. Comme la raison est positive, alors $q = 3$.*

■ *On peut alors trouver $u_0$.*

$$u_5 = q^5 \times u_0 \iff 486 = 3^5 \times u_0 \iff u_0 = \frac{486}{243} = 2$$

■ *On peut alors trouver $u_{10}$.*

$$\begin{aligned} u_{10} &= q^{10-7} \times u_7 \\ &= q^3 \times 4374 \\ &= 2^3 \times 4374 \\ &= 118098 \end{aligned}$$

## Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

**Propriété 35** .

*$n$ est un entier naturel non nul et $q$ un réel différent de 1 alors on a :*

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Démonstration 36** .

*On note*

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$$

*et*

$$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1}$$

*Ainsi :*

$$\begin{aligned} S - q \times S &= \left(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n\right) - \left(q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1}\right) \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

*donc*

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Propriété 37** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $q \neq 1$. *Soient* $n$ *et* $p$ *deux entiers naturels tels que* $n \geq p$.

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + ... + u_n &= (\textit{premier terme de la somme}) \times \frac{1 - (\textit{raison})^{\textit{nombre de termes de la somme}}}{1 - \textit{raison}} \\ &= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

**Remarque 38** .

*Si* $p = 0$ *alors :* $u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

**Démonstration 39** .

*Soient* $n$ *et* $p$ *deux entiers naturels tels que* $n \geq p$. *Comme* $q \neq 1$, *alors*

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + ... + u_n &= u_p + u_{p+1} + ... + \underbrace{u_n}_{=q^{n-p} \times u_p} \\ &= u_p + u_{p+1} + ... + u_p \times q^{n-p} \\ &= u_p\left(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-p}\right) \\ &= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

**Exemple 40** .

*Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $q = 2$ *et de premier terme* $v_0 = 3$.
*On a*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3\left(2^n\right)$$

*Calculons* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ *en fonction de* $n$.
*On a*

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + ... + v_n \\ &= 3 \times \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right) \\ &= 3\left(2^{n+1} - 1\right) \end{aligned}$$

**Exemple 41** $\left(\textit{avec le symbole } \sum\right)$

*Calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k \quad \textit{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3^k} \; \textit{avec} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

■

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10} 2^k &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{10} \\ &= \frac{1 - 2^{10-0+1}}{1-2} \\ &= 2^{11} - 1 \\ &= 2047\end{aligned}$$

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3^k} &= 5 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \\ &= 5\left(\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).\end{aligned}$$

**Exercice d'application 42** .

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$

*Pour tout entier naturel* $n$, *on pose :* $v_n = u_n - 2$

1. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.*
2. *Déterminer* $v_n$ *en fonction de* $n$.
3. *En déduire* $u_n$ *en fonction de* $n$.

**FIN**

Pr : **Yahya MATIOUI**