BAC BLANC N1 / Durée 3H

EXERCICE 1 (4 *points*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases}$

On pose : $v_n = u_n + n - 1$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.

1. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{5}$.
2. **a)** *Calculer* v_n *en fonction de* n.
   b) *En déduire* u_n *en fonction de* n *puis calculer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.
3. *On pose :* $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ *et* $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ *tel que* n *élément de* $\mathbb{N}$.
   Montrer que : $T_n = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right)$ *et que* $S_n = T_n - \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.

EXERCICE 2 (5 *points*)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *on considère les points* A, B *et* C *d'affixes respectives :* $z_A = -4$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ *et* $z_C = -iz_B$.

1. **a)** *Montrer que le triangle* OBC *est isocèle et que :* $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
   b) *Mettre* z_B *sous forme trigonométrique et déduire que le point* B *appartient au cercle de centre* O *et de rayon* 2.
   c) *Placer le point* A *et construire les points* B *et* C.
2. *Soit* D *le point d'affixe* $z_D = (1 - i)z_B$.
   a) *Montrer que le quadrilatère* $OCDB$ *est un carré.*
   b) *Montrer que :* $Aff(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{3}z_C$.
   c) *Déduire que les points* A, B *et* D *sont alignés.*
   d) *Calculer l'aire du quadrilatère* $OADC$.

Problème d'analyse 3 (11 *points*)

Partie N1 *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :* $g(x) = 1 + x\ln x$.

1) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$, $g'(x) = 1 + \ln x$.

2) *Dresser le tableau de variations de* g *en justifiant votre réponse.*

3) *Justifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}),\ g(x) > 0$.

4) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\,,\ (x-1)\ln x \geq 0$. (*On pourra étudier deux cas*).

Partie N2 *On considère la fonction* f *définie par :* $f(x) = (\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x} + 1$. *Et* (C_f) *sa courbe dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (*d'unité* 1*cm*).

1)-a) *Déterminer* D_f*, puis calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

b) *Montrer que* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$*, puis interpréter géométriquement ce résultat.*

2)-a) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\,,\ f'(x) = \dfrac{(x-1)\ln x + g(x)}{x^2}$

b) *Ecrire l'équation de la tangente* (Δ) *à* (C_f) *au point d'abscisse* $x_0 = 1$.

c) *Montrer que* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{*+}$*, puis dresser son tableau de variations.*

3)-a) *Montrer que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

b) *En déduire que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, *puis déterminer la nature de la branche infini de* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

4)-a) *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$*, admet une solution unique* α *dans* $\mathbb{R}^{*+}$. *Et que :* $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{3}{4}$.

b) *Construire la tangente* (Δ) *et* (C_f) *dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

5)-a) *Montrer que* f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *sur* $\mathbb{R}$.

b) *Montrer que* f^{-1} *est dérivable en* $b = 1$ *et que :* $(f^{-1})'(1) = 1$.

6)-a) *Calculer* $I = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x} dx$.

b) *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

c) *En déduire en* cm^2 *l'aire du domaine délimité par le courbe* (C_f) *et l'axe* (Ox) *et les droites d'équations :* $x = 1$ *et* $x = e$.

7) *Graphiquement justifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}),\ f(x) \leq x$ *et que l'équation* $f(x) = x$ *admet une solution unique que l'on déterminera.*

Partie N3 *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 = 2$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = f(u_n)$

1) *Montrer par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq 1$.

2) *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.*

3) *Calculer* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ *en justifiant votre réponse.*

FIN