SÉRIE SUR LIMITES ET CONTINUITÉ

EXERCICE 1 .

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue en 0.

EXERCICE 2 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x & si\ \ x < -1 \\ f(x) = x^2 + 4 & si\ \ -1 \leq x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+2} + 2 & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + ax^2 - 3 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = ax + b & si\ \ 1 < x < 2 \\ f(x) = \dfrac{ax^2+2}{3x-1} & si\ \ x \geq 2 \end{cases}$

Déterminer les nombres a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-a}{x-2} & si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{2x+b}{3} & si\ \ x \leq 2 \end{cases}$

Déterminer les nombres a et b pour que f soit continue en 2.

EXERCICE 5 .

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche au point x_0 :

1.
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-4} \quad si \quad 0 \leq x < 4 \\ f(4) = \dfrac{1}{2} \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-4} \quad si\ x > 4 \end{cases} \qquad et \quad x_0 = 4.$$

2.
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x - \sin(2x)}{x^3} \quad si \quad x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad si\ x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, 0\right[\end{cases} \qquad et \quad x_0 = 0.$$

EXERCICE 6 .

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1. $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0, \quad I = [0, 1]$.
2. $(E) : 2\sin x = x, \quad I = \left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right[$.
3. $(E) : x + x^2 + ... + x^n = 1. \quad I = \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

EXERCICE 7 .

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^3 + x + 1 = 0$.

Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $\left]\dfrac{-3}{4}, \dfrac{-1}{2}\right[$.

EXERCICE 8 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que l'équation :* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos nx = 0$ *admet au moins une solution dans* $[0, \pi]$.
2. *Montrer que l'équation :* $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \cos(\pi x) = 0$ *admet une unique solution dans* $]0, 1[$.

EXERCICE 9 .

Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$)

Montrer que : $(\exists c \in]a, b[), \quad f(c) = \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c}$.

EXERCICE 10 .

On considère f une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$. Montrer que :

$$(\exists c \in]0,1[)\,,\ f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}.$$

EXERCICE 11 .

Soit f une fonction définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et continue sur $[0,1]$. Montrer que :

$$(\exists c \in [0,1])\,,\ f(c) + f(1-c) = 2c.$$

EXERCICE 12 .

Soit f une fonction continue sur $I = [0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que : $\left(\exists c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right),\ f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.

EXERCICE 13 .

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

1. *Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle* $\left[0, \frac{2n}{n+1}\right]$.
2. *En déduire que :* $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.
3. *Montrer qu'il exsite au moins un réel* $\alpha \in \left]\frac{2n}{n+1}, 2\right[$ *tel que :* $f(\alpha) = 0$.
4. *Vérifier que :* $\alpha^n = \frac{1}{2-\alpha}$.

FIN

www.etude − generale.com

Pr : **Yahya MATIOUI**