CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ N1

EXERCICE 1 .

1. *Montrons que la fonction* h *définie par* $\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x-2} & , \quad x \neq 2 \\ h(2) = \dfrac{5}{12} \end{cases}$ *est continue en* 2 :

   On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 2} h(x) &= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x-2} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{5x-2-8}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{5x-10}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{5(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{5}{\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4} \\
&= \frac{5}{\sqrt[3]{(10-2)^2}+2\sqrt[3]{10-2}+4} \\
&= \frac{5}{4+4+4} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

   donc : $\lim_{x \longrightarrow 2} h(x) = h(2)$ *d'où la fonction* h *est continue en* 2.

2. *Calculons* : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2+4x}-x$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2
\end{aligned}$$

donc $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x=2$.

3. *Cherchons l'ordre croissante des nombres :* $a=2$, $b=\sqrt[3]{9}$, $c=\sqrt{3}$ *et* $d=\sqrt[6]{80}$

On a : $\begin{cases} a=2=\sqrt[6]{2^6}=\sqrt[6]{64} \\ b=\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{9^2}=\sqrt[6]{81} \\ c=\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}\end{cases}$ *et comme la fonction* $x\longmapsto\sqrt[6]{x}$ *est strictement croissante sur* $[0,+\infty[$ *donc* $\sqrt[6]{27}<\sqrt[6]{64}<\sqrt[6]{80}<\sqrt[6]{81}$ *c'est-à-dire*

$$c<a<d<b$$

4. *Résolvons l'équation :* (E) : $x^{\frac{5}{3}}=2$.

L'équation (E) *est définie sur* $]0,+\infty[$.

Soit $x\in\,]0,+\infty[$ *, on pose* $X=x^{\frac{1}{3}}$ *donc*

$$\begin{aligned}(E) &\iff X^5=2\\ &\iff X=\sqrt[5]{2}\end{aligned}$$

et comme $X=x^{\frac{1}{3}}$ *donc*

$$(E)\iff x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[5]{2}\iff x=\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{8}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est* $S=\left\{\sqrt[5]{8}\right\}$.

5. *Montrons que :* $\dfrac{\sqrt[8]{64}\times 2^{\frac{-1}{2}}\times\sqrt[6]{72}}{\sqrt[4]{8}\times 3^{\frac{-2}{3}}}=3.$

On a

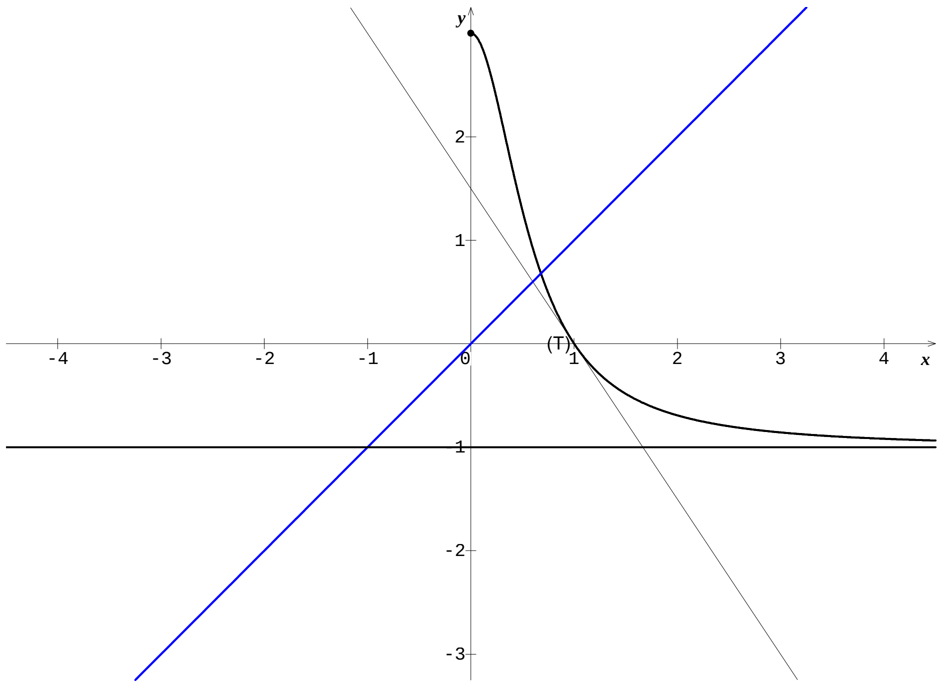
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[8]{64}\times 2^{\frac{-1}{2}}\times\sqrt[6]{72}}{\sqrt[4]{8}\times 3^{\frac{-2}{3}}} &= \frac{\sqrt[8]{2^6}\times 2^{\frac{-1}{2}}\times\sqrt[6]{2^3\times 3^2}}{\sqrt[4]{2^3}\times 3^{\frac{-2}{3}}}\\
&= \frac{2^{\frac{6}{8}}\times 2^{\frac{-1}{2}}\times\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3^2}}{2^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{-2}{3}}}\\
&= \frac{2^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{-1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{-2}{3}}}\\
&= \frac{2^{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\times 3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{-2}{3}}}\\
&= \frac{2^{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{2^{\frac{3}{4}}}\times\frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{-2}{3}}}\\
&= \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}}\times\frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{-2}{3}}}\\
&= 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\\
&= 3^{\frac{3}{3}} = 3
\end{aligned}$$

donc $\dfrac{\sqrt[8]{64}\times 2^{\frac{-1}{2}}\times\sqrt[6]{72}}{\sqrt[4]{8}\times 3^{\frac{-2}{3}}} = 3.$

EXERCICE 2 .

1. La courbe (C_f) de la fonction f définie, dérivable et strictement décroissante sur

$[0, +\infty[$.



a) *On a :* $f(0) = 3$, $f(1) = 0$ *et* $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(0) = 3$.

Au voisinage de $+\infty$ (*c'est-à-dire quand* x *tend vers* $+\infty$)

on remarque que (C_f) *se rapproche de plus en plus de la droite d'équation* $y = -1$

donc $f(x)$ *se rapporche de plus en plus du nombre* -1 *d'où* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -1$.

b) *Déterminons :* $f'_d(0)$ *et* $f'(1)$.

La courbe (C_f) *admet des tangentes horizontales lorsque sa dérivée s'annule c'est-à-dire* $f'_d(0) = 0$.

On a $f'(1)$ *est le coefficient directeur de la tangente à la courbe* (C_f) *au point d'abscisse* 1 *donc* $f'(1) = \dfrac{-3}{2}$.

c) *Une équation cartésienne de la tangente* (T) *à la courbe* (C_f) *au point d'abscisse* 1 *est :* $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ *et comme* $\begin{cases} f'(1) = \dfrac{-3}{2} \\ f(1) = 0 \end{cases}$ *donc* $(T) : y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

d) *La fonction* f *est strictement décroissante sur* $[0, +\infty[$ *donc*

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $-$	
f	$3 \searrow$	-1

2. **a)** *Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :*

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

On a

$$J = f\left([0,+\infty[\right) = \left]\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x), f(0)\right] =]-1,3].$$

b) *Déterminons $f^{-1}(0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(0)$:*

On a : $f(1) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 1$. La fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et on a : $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{2}{3}$.

3. *La fonction f représentée par : $(\forall x \in I)$, $f(x) = \dfrac{3-3x^2}{1+3x^2}$.*

Montrons que : $(\forall x \in I)$, $f'(x) = \dfrac{-24x}{\left(1+3x^2\right)^2}$.

La fonction f est dérivable sur $I =]-\infty,0]$ car c'est la restriction d'une fonction rationnelle.

$$\begin{aligned}(\forall x \in I), \quad f'(x) &= \frac{\left(3-3x^2\right)'\left(1+3x^2\right) - \left(3-3x^2\right)\left(1+3x^2\right)'}{\left(1+3x^2\right)^2}\\ &= \frac{-6x\left(1+3x^2\right) - 6x\left(3-3x^2\right)}{\left(1+3x^2\right)^2}\\ &= \frac{-6x\left(1+3x^2+3-3x^2\right)}{\left(1+3x^2\right)^2}\\ &= \frac{-6x\times 4}{\left(1+3x^2\right)^2}\\ &= \frac{-24x}{\left(1+3x^2\right)^2}\end{aligned}$$

donc : $(\forall x \in I)$, $f'(x) = \dfrac{-24x}{\left(1+3x^2\right)^2}$.

4. *Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = f(x) - x$*

a) *Calculons $g'(x)$:*

La fonction g est dérivable sur I.

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in I)\,, \qquad g'(x) &= \frac{-24x}{\left(1+3x^2\right)^2} - 1 \\
&= \frac{-24x - \left(1+3x^2\right)^2}{\left(1+3x^2\right)^2} \\
&= \frac{-1 - 24x - 6x^2 - 9x^4}{\left(1+3x^2\right)^2} \\
&= -\frac{1}{\left(1+3x^2\right)^2} \times \left(9x^4 + 6x^2 + 24x + 1\right)
\end{aligned}
$$

donc $(\forall x \in I)\,,\ \ g'(x) = -\dfrac{\left(9x^4+6x^2+24x+1\right)}{\left(1+3x^2\right)^2}$, *d'où* $(\forall x \in I)\,,\ \ g'(x) < 0.$

b) *Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet dans I une unique solution α :*
La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc

$$g\left([0,+\infty[\right) = \left]\lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x)\,,\ g(0)\right]$$

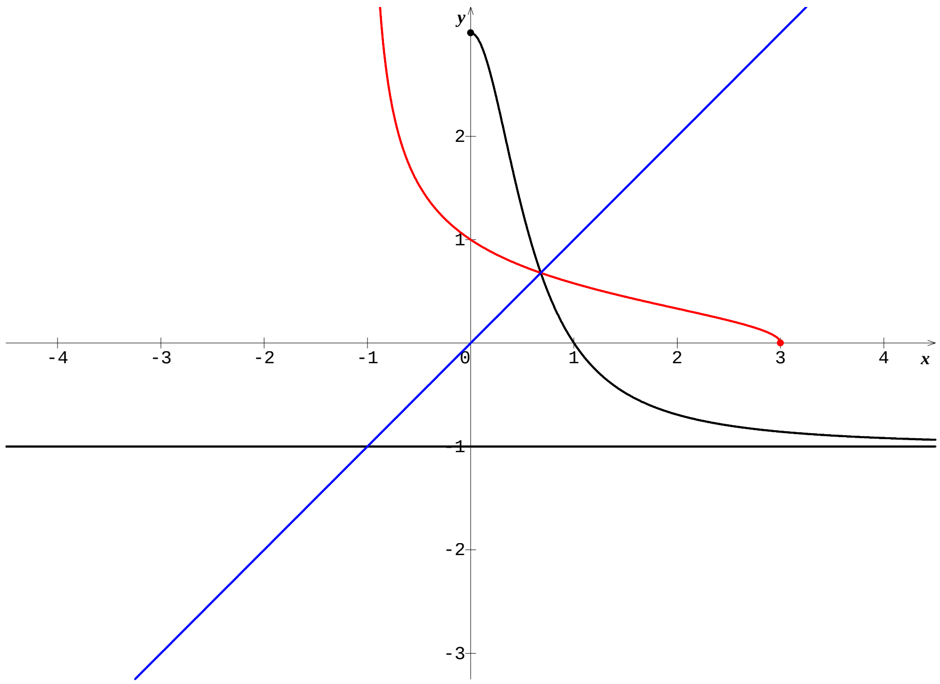
$$Or : \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = -1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} -x = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = -\infty$$

et : $g(0) = f(0) - 0 = 3$, *donc* $g\left([0,+\infty[\right) = \left]-\infty, 3\right]$ *et comme* $0 \in \left]-\infty, 3\right]$ *on déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$.*

c) *Montrons que :* $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$

La fonction g est continue sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ *et on a* $\begin{cases} g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{14} \\ \\ g(1) = -1 \end{cases}$ *alors* $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \times g(1) < 0$ *donc, d'après le T.V.I on a* $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

5. **a)** *La courbe* (C') *de la fonction* f^{-1} :



b) *Graphiquement on déduit que la fonction* f^{-1} *n'est pas dérivable à gauche en* 3.

6. *Déterminons l'expression de* $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$:
Soit $x \in]-1,3]$ *et* $y \in [0,+\infty[$, *tels que* $y = f^{-1}(x)$
On a

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}(x) \\ &\iff f(y) = x \\ &\iff \frac{3-3y^2}{1+3y^2} = x \\ &\iff 3-3y^2 = x\left(1+3y^2\right) \\ &\iff 3-3y^2 = x+3xy^2 \\ &\iff -3y^2-3xy^2 = x-3 \\ &\iff 3y^2+3xy^2 = 3-x \\ &\iff 3y^2(1+x) = 3-x \\ &\iff y^2 = \frac{3-x}{3(1+x)} \\ &\iff y = \sqrt{\frac{3-x}{3(1+x)}} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]-1,3])\,,\quad f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{3(1+x)}}.$