# CORRECTION DE LA SÉRIE

**EXERCICE 1** .

*Calculons les limites.*

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)$

*On a*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(-x)^3}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1-\sqrt[3]{-\frac{x^2}{x^3}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

*et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x}}=0$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}1-\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x}}=1$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)=1.$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x-1}\right)$

*On a*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x-1}\right) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x-\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x-x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)\end{aligned}$$

*et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=0$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x=+\infty$ *donc par produit on obtient* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)=+\infty$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x-1}\right)=+\infty$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\left(x^2+x-\sqrt[3]{1-x}\right).$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(x^2+x-\sqrt[3]{1-x}\right) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1-x}}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{\left(x^2\right)^3}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x^6}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^5}}\right)
\end{aligned}$$

*on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^5}}=0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}1+\frac{1}{x}=1$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}1+\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^5}}=1$ *et* *comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x^2=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^5}}\right)=+\infty$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(x^2+x-\sqrt[3]{1-x}\right)=+\infty$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)
\end{aligned}$$

*on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=+\infty$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)=+\infty$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{x^3+x^2+1-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^3\left(x^3+x^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x^3\right)^2}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^3\left(x^3+x^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x^3\right)^2}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3\right)^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}+x^2}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+x^2\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}+x^2}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}+1}\right)
\end{aligned}$$

*on a* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}+1=3$ *et* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}1+\dfrac{1}{x^2}=1$ *par qoutient*
*on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)=\frac{1}{3}$$

♣ $\lim_{x\longmapsto+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longmapsto+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x &= \lim_{x\longmapsto+\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}-2x\\
&= \lim_{x\longmapsto+\infty}x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-2x\\
&= \lim_{x\longmapsto+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-2\right)
\end{aligned}$$

*comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-2=-1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x=+\infty$ *alors par produit on obtient* $\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-2\right)=-\infty$ *d'où*

$$\lim_{x\longmapsto+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x=-\infty$$

♣ $\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\left(x^{\frac{2}{3}}.\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)\right)$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longmapsto+\infty}\left(x^{\frac{2}{3}}.\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)\right) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\sqrt[4]{x^4-1}\right)$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\sqrt[4]{x^4-1}\right) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-x-\sqrt[4]{x^4-1}+x\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-(-x)\right)-\left(\sqrt[4]{x^4-1}-(-x)\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1-x^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}-\\
&\quad \frac{x^4-1-(-x)^4}{\left(\sqrt[4]{x^4-1}-x\right)\left(\left(\sqrt[4]{x^4-1}\right)^2+x^2\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}+\\
&\quad \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^4-1}-x\right)\left(\left(\sqrt[4]{x^4-1}\right)^2+x^2\right)}
\end{aligned}$$

*et comme* $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}-x\sqrt[3]{1-x^3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2=$ $+\infty$ *par inverse on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0$ ,

*de même on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{x^4-1}-x\right)\left(\left(\sqrt[4]{x^4-1}\right)^2+x^2\right)}=0$ *donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\sqrt[4]{x^4-1}\right)=0$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2}-x-\sqrt{x^2-1}+x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2}-x-\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3-x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}-\left(\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+x^2\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}
\end{aligned}$$

*et comme* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}1-\frac{1}{x}=1$ *alors* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=1$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{-1}{3}$ *et on a* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}=-\frac{1}{3}$ *d'où* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{-1}{3}$.

♣ $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\right)$.

*On a*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\right) = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\dfrac{x-(x+1)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+1}\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+\left(\sqrt[4]{(x+1)}\right)^2\right)}}{\dfrac{(x+1)-x}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\dfrac{-1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+1}\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+\left(\sqrt[4]{(x+1)}\right)^2\right)}}{\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x\,(x+1)}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+1}\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+\left(\sqrt[4]{(x+1)}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x\,(x+1)}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}\right)^2\left(1+\left(\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x^3}\left[\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^2\right)\right]}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{\sqrt[3]{x^2}\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right]}{\sqrt[4]{x^3}\left[\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^2\right)\right]}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right]}{\sqrt[12]{x}\left[\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2\right)\right]}$$

*et comme* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} = 1$

*alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}}+1}{\left(1+\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2\right)} = \dfrac{3}{4}$ *et on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt[12]{x}} = 0$ *donc*

*par produit on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\right)=0$$

**EXERCICE 2** .

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}$ :

*On a*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-1\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{-x^3}}-1\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}-1\end{aligned}$$

*et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}-\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x}}=-\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}=-\infty.$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

*On a*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt[3]{4x+4}-2}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\dfrac{(4x+4)-8}{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}}{\dfrac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{4\,(x-1)}{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}\times\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{4\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}\\ &= \frac{12}{12}=1\end{aligned}$$

*donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}-2}{\sqrt[3]{x}-1}=1.$

♣ $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}} &= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x-2)}{\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{2x}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x-2)\left((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{2x}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x-2)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{2x}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{3\sqrt[6]{16}}{2\sqrt[6]{8}} = \frac{3}{2} \times \sqrt[6]{2}
\end{aligned}$$

*donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{3\sqrt[6]{2}}{2}$.

♣ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{1-\sqrt[3]{x+1}}$.

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{1-\sqrt[3]{x+1}} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}}{\dfrac{-x}{1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \times \frac{1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}{-x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

*donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{1-\sqrt[3]{x+1}} = -\dfrac{3}{2}$.

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}\right).$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}\right) &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^3+x^2-x^2-1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)\left(x^2+1\right)}+\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^3-1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)\left(x^2+1\right)}+\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)\left(x^2+1\right)}+\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2+x+1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)\left(x^2+1\right)}+\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}\\
&= \frac{3}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}}$

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\sqrt[3]{x}-1+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2-1}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{(x-1)}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{(x-1)(x+1)}}+\sqrt{\frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+1)}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}}+\sqrt{\frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+1)}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x+1}}+\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x+1}}
\end{aligned}$$

*et comme* $\lim_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\left((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x+1}} = 0$ *et* $\lim_{x\longrightarrow 1^+} \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x+1}} = 0$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x}-1+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

**EXERCICE 3** .

**1)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_1)$ : $\sqrt[4]{1-x} = 1-x$

*On cherche l'ensemble de définition* $D$ *de l'équation* $(E_1)$ :

*On a* : $D = \{x \in \mathbb{R}/\ \ 1-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/\ x \leq 1\} = ]-\infty, 1]$.

*Soit* $x \in ]-\infty, 1]$, *on pose* $X = \sqrt[4]{1-x}$ *donc*

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff X = X^4 \\
&\iff X - X^4 = 0 \\
&\iff X\left(1-X^3\right) = 0 \\
&\iff X(1-X)\left(1+X+X^2\right) = 0 \\
&\iff X = 0 \text{ ou } 1-X = 0 \text{ ou } 1+X+X^2 = 0 \\
&\iff X = 0 \text{ ou } X = 1
\end{aligned}$$

*et comme le discriminant du trinôme* $1+X+X^2$ *est* $-3$ *alors* $1+X+X^2 \neq 0$ *donc*

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff \sqrt[4]{1-x} = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt[4]{1-x} = 1 \\
&\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 0
\end{aligned}$$

*d'où l'ensemble des solutions de l'équation* $(E_1)$ *est* : $S = \{0, 1\}$.

**2)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_2)$ : $x + \sqrt[3]{x} = 2$.

*L'équation* $(E_2)$ *est définie sur* $[0, +\infty[$.

*Soit* $x \in [0, +\infty[$, *on pose* $X = \sqrt[3]{x}$ *c'est-à-dire* $x = X^3$ *donc*

$$\begin{aligned}
(E_2) &\iff X^3 + X = 2 \\
&\iff X^3 - 1 + X - 1 = 0 \\
&\iff (X-1)\left(X^2+X+1\right) + (X-1) = 0 \\
&\iff (X-1)\left(X^2+X+2\right) = 0 \\
&\iff X = 1 \quad \text{ou} \quad X^2+X+2 = 0
\end{aligned}$$

*et comme le discriminant du trinôme* $X^2+X+2$ *est* $-3$ *alors* $X^2+X+2 \neq 0$ *donc*

$$\begin{aligned}
(E_2) &\iff \sqrt[3]{x} = 1 \\
&\iff x = 1
\end{aligned}$$

*D'où l'ensemble des solutions de l'équation* $(E_2)$ *est* : $S = \{1\}$

**3)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_3)$ : $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=12.$

*L'équation* $(E_3)$ *est définie sur* $[0,+\infty[$ .

*Soit* $x\in\mathbb{R}^+$, *on a*

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{x^2}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2$ , *on pose :* $X=\sqrt[6]{x}$ *donc*

$$\begin{array}{lll} (E_3) & \Longleftrightarrow & X^3+X^2-12=0 \\ & \Longleftrightarrow & X^3-8+X^2-4=0 \\ & \Longleftrightarrow & (X-2)\left(X^2+2X+4\right)+(X-2)(X+2)=0 \\ & \Longleftrightarrow & (X-2)\left(X^2+3X+6\right)=0 \\ & \Longleftrightarrow & X=2 \quad ou \quad X^2+3X+6=0 \end{array}$$

*et comme le discriminant du trinôme* $X^2+X+2$ *est* $-15$ *alors* $X^2+3X+6\neq 0$ *donc*

$$\begin{array}{lll} (E_3) & \Longleftrightarrow & \sqrt[6]{x}=2 \\ & \Longleftrightarrow & x=2^6=64 \end{array}$$

*D'où l'ensemble des solutions de l'équation* $(E_3)$ *est :* $S=\{64\}$ .

**4)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_4)$ : $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5.$

*On cherche l'ensemble de définition* $D$ *de l'équation* $(E_4)$ :

*On a :*

$$\begin{array}{lll} D & = & \{x\in\mathbb{R}/ \quad x+7\geq 0 \quad et \quad 28-x\geq 0\} \\ & = & \{x\in\mathbb{R}/ \quad x\geq -7 \quad ou \quad x\leq 28\} \\ & = & [-7,28]\,. \end{array}$$

*Soit* $x\in[-7,28]$ , *on a*

$$\begin{array}{lll} (E_4) & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}\right)^3=5^3 \\ & \Longleftrightarrow & (x+7)+3\sqrt[3]{(x+7)^2}.\sqrt[3]{28-x}+3\sqrt[3]{x+7}.\sqrt[3]{(28-x)^2}+28-x=125 \\ & \Longleftrightarrow & x+7+28-x+3\sqrt[3]{x+7}\sqrt[3]{28-x}\left(\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}\right)=125 \\ & \Longrightarrow & 35+15\sqrt[3]{(x+7)}.\sqrt[3]{28-x}=125 \\ & \Longrightarrow & \sqrt[3]{(x+7)}.\sqrt[3]{28-x}=6 \\ & \Longrightarrow & (x+7)(28-x)=6^3=216 \\ & \Longrightarrow & x^2-21x+20=0 \\ & \Longrightarrow & x=1 \quad ou \quad x=20 \end{array}$$

*Réciproquement si :* $x=1$ *ou* $x=20$ *alors* $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5$. *Donc l'ensemble des solutions de l'équation* $(E_4)$ *est :* $S=\{1,20\}$ .