CORRECTION DE LA SÉRIE

EXERCICE 1 .

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{-1}{8} \end{cases}$

Montrons que la fonction f est continue en 0 :
On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{3+\cos x-4}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-1+\cos x}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-(1-\cos x)}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-(1-\cos x)}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-(1-\cos x)}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{-(1-\cos x)}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2} = \dfrac{1}{4}$ *par produit on obtient* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{-(1-\cos x)}{x^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2} = \dfrac{-1}{8}$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \dfrac{-1}{8}$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$$

par suite la fonction f est continue au point $x_0 = 0$.

EXERCICE 2 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x & si \quad x < -1 \\ f(x) = x^2 + 4 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+2}+2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

♣ *La fonction* $x \longmapsto 2x^2 - 3x$ *est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme donc f est continue sur l'intervalle* $]-\infty, -1[$.

♣ *La fonction* $x \longmapsto x^2+4$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, car c'est une fonction polynôme donc* f *est continue sur l'intervalle* $[-1,1[$.

♣ *La fonction* $x \longmapsto \sqrt{x^2+2}+2$ *est continue sur* $[1,+\infty[$ *donc* f *est continue sur* $[1,+\infty[$.

♣ *On étudie la continuité de* f *en* 1 *et* -1 :

On a : $f(-1)=5$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} 2x^2-3x=5$ *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$$

d'où f *est continue à gauche en* -1 *et comme* f *est continue à droite en* -1 $\left(\begin{array}{c}\textit{la fonction } f \textit{ est} \\ \textit{continue sur } [-1,1[\end{array}\right)$ *par suite* f *est continue en* -1.

On a : $f(1)=\sqrt{3}+2$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} x^2+4=5 \neq f(1)$ *donc* f *n'est pas continue à gauche de* 1 (f *est continue sur* $[1,+\infty[$ *c'est-à-dire continue à droite de en* 1) *par suite* f *n'est pas continue en* 1.

Donc f *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 .

Soit f *la fonction numérique définie par* : $\begin{cases} f(x) = x^3+ax^2-3 & si \quad x \leq 1 \\ f(x) = ax+b & si \quad 1<x<2 \\ f(x) = \dfrac{ax^2+2}{3x-1} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

Déterminons a *et* b :

♣ *La fonction* $x \longmapsto x^3+ax^2-3$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, car c'est une fonction polynôme donc* f *est continue sur l'intervalle* $]-\infty,1]$.

♣ *La fonction* $x \longmapsto ax+b$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, car c'est une fonction polynôme donc* f *est continue sur l'intervalle* $]1,2[$.

♣ *La fonction* $x \longmapsto \dfrac{ax^2+2}{3x-1}$ *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ *donc* f *est continue sur* $[2,+\infty[$.

D'où f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* : $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = f(2) \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} ax+b = a+b$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 2a+b$ *et* : $\begin{cases} f(1) = a-2 \\ f(2) = \dfrac{4a+2}{5} \end{cases}$

donc

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^{+}} f(x)=f(1) \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^{-}} f(x)=f(2)\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a+b=a-2 \\ \\ 2a+b=\dfrac{4a+2}{5}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b=-2 \\ \\ a=2\end{array}\right.$$

donc f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $a=2$ *et* $b=-2.$

EXERCICE 4 .

Soit f *la fonction numérique définie par :* $\left\{\begin{array}{ll}f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & si \quad x>2 \\ \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & si \quad x\leq 2\end{array}\right.$

Déterminons a *et* b :

♣ *La fonction* $x\longmapsto \dfrac{x^2+x-a}{x-2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ *donc* f *est continue sur l'intervalle* $]2,+\infty[$.

♣ *La fonction* $x\longmapsto \dfrac{2x+b}{3}$ *est continue sur* $]-\infty,2]$, *donc* f *est continue sur l'intervalle* $]-\infty,2]$.

D'où f *est continue sur* 2 *si et seulement si* $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^{+}} f(x)=f(2)$, *c'est-à-dire*

$$\lim_{x\longrightarrow 2^{+}} \frac{x^2+x-a}{x-2}=\frac{4+b}{3} \qquad (1)$$

(1) *implique que* x^2-x-a *s'annule en* 2 $\left(\text{sinon } \dfrac{4+b}{3}\notin\mathbb{R}\right)$ *donc* $4+2-a=0$ *d'où*

$$a=6$$

donc

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\longrightarrow 2^{+}} \frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{4+b}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\longrightarrow 2^{+}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\frac{4+b}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\longrightarrow 2^{+}} x+3=\frac{4+b}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad 5=\frac{4+b}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad b=11\end{aligned}$$

d'où f *est continue en* 2 *si et seulement si* $a=6$ *et* $b=11.$

EXERCICE 5 .

♣ *On a :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-4} = \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \sqrt{\dfrac{x-4}{(x-4)^2}} = \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \sqrt{\dfrac{1}{(x-4)}}$ *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \dfrac{1}{x-4} = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \sqrt{\dfrac{1}{(x-4)}} = +\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = +\infty$ *par suite* f *n'est pas continue à droite en* $x_0 = 4$.

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 4^+} \frac{(x-2\sqrt{x})(x+2\sqrt{x})}{(x-4)(x+2\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 4^+} \frac{x^2-4x}{(x-4)(x+2\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 4^+} \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+2\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 4^+} \frac{x}{(x+2\sqrt{x})} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = f(4)$ *d'où* f *est continue à gauche en* $x_0 = 4$.

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\sin x - 2\sin x \times \cos x}{x^3} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+} 2 \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2}
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ *donc par produit on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} 2 \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} = 1$$

d'où $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ *par suite la fonction* f *est continue à droite en* $x_0 = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\tan x-\sin x}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin x-\cos x\times\sin x}{\cos x}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x\times\cos x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x^2}{\cos x}
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x^2}{\cos x}=0$ *donc par produit* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{\cos x}=0$ *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)\neq f(0)$ *par suite la fonction* f *n'est pas continue à gauche en* $x_0=0$.

EXERCICE 6 .

♣ *On considère la fonction* f *définie sur* $[0,1]$ *par :* $f(x)=x^3-3x+1$.

La fonction f *est continue sur* $[0,1]$ *et* $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases}$ *donc* $f(0)\times f(1)\leq 0$. *D'après le T.V.I, l'équation* $f(x)=0$ *admet au moins une solution dans* $[0,1]$.

♣ *On considère la fonction* f *définie sur* $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ *par :* $f(x)=2\sin x-x$.

La fonction f *est continue sur* $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ *et* $\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3} \\ f(\pi)=-\pi \end{cases}$ *donc* $f(0)\times f(1)<0$.

D'après le T.V.I, l'équation $f(x)=0$ *admet au moins une solution dans* $\left]\dfrac{\pi}{3},\pi\right[$.

♣ *On considère la fonction* f *définie sur* $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ *par :* $f(x)=x+x^2+...+x^n-1$

La fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ *et* $f(1)=(1+1+...+1)-1=n-1\geq 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)-1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k-1 \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-1 \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n<0 \end{aligned}$$

donc $f(1)\times f\left(\frac{1}{2}\right)\leq 0$. *D'après le T.V.I, l'équation* $f(x)=0$ *admet au moins une solution dans* $\left]\frac{1}{2},1\right]$.

EXERCICE 7 .

On considère dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E): x^3+x+1=0$.

Montrons que l'équation (E) *admet une unique solution dans* $\left]\frac{-3}{4},\frac{-1}{2}\right[$:

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{-3}{4},\frac{-1}{2}\right]$ *par :* $f(x)=x^3+x+1$.

La fonction f est continue sur $\left[\frac{-3}{4},\frac{-1}{2}\right]$ *et* $\begin{cases} f\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{-11}{64} \\ f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{3}{8} \end{cases}$ *donc*

$f\left(\frac{-3}{4}\right)\times f\left(\frac{-1}{2}\right)<0.$

La fonction f est dérivable sur $\left[\frac{-3}{4},\frac{-1}{2}\right]$ *et* $\left(\forall x\in\left[\frac{-3}{4},\frac{-1}{2}\right]\right)$, $f'(x)=3x^2+1>0$ *donc f est strictement croissante sur* $\left[\frac{-3}{4},\frac{-1}{2}\right]$ *d'où l'équation* (E) *admet une solution unique dans* $\left]\frac{-3}{4},\frac{-1}{2}\right[$.

EXERCICE 8 .

1. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *On considère la fonction f définie sur* $[0,\pi]$ *par :*

$$f(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx$$

La fonction f est continue sur $[0,\pi]$, et : $f(0)=\underbrace{1+1+...+1}_{n\ fois}=n$ *donc* $f(0)>0$ *et*

$$f(\pi)=(-1)+1+(-1)+...+(-1)^n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=(-1)\times\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{(-1)^n-1}{2}$$

on a : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $(-1)^n\leq 1$ *donc* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $\dfrac{(-1)^n-1}{2}\leq 0$ *d'où* $f(\pi)\leq 0$ *par suite* $f(0)\times f(\pi)\leq 0.$

D'après le T.V.I, l'équation $f(x)=0$ *admet au moins une solution dans* $[0,\pi]$. *D'où l'équation* $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=0$ *admet au moins une solution dans* $[0,\pi]$.

2. *Montrons que l'équation* $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\cos(\pi x)=0$ *admet une unique solution dans* $]0,\pi[$.

   On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\cos(\pi x)$.

   La fonction $u:x\longmapsto\pi x$ *est continue sur* $[0,1]$ *et on a* $u([0,1])\subset[0,\pi]$ *et comme la fonction* $v:x\longmapsto\cos x$ *est continue sur* $[0,\pi]$ *donc la fonction* $v\circ u:x\longmapsto\cos(\pi x)$ *est continue sur* $[0,1]$. *La fonction* $f_1:x\longmapsto x$ *est continue sur* $[0,1]$ *et comme la fonction* $f_2:x\longmapsto x^2+1$ *est continue et positive sur* $[0,1]$ *donc la fonction* $\sqrt{f_2}$ *est continue sur* $[0,1]$, *de plus la fonction* $\sqrt{f_2}$ *ne s'annule pas sur* $[0,1]$ *donc la fonction* $\dfrac{f_1}{\sqrt{f_2}}$ *est continue sur* $[0,1]$ *par suite la fonction* $f=\dfrac{f_1}{\sqrt{f_2}}-v\circ u$ *est continue sur* $[0,1]$.

   On a : $f(0)\times f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1<0.$

   La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et on a

$$(\forall x\in]0,1[),\ f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}+\pi\sin(\pi x)$$

   et comme $(\forall x\in]0,1[)$, $f'(x)>0$ *d'où la fonction f est strictement croissante sur* $[0,1]$.

   D' après le T.V.I, l'équation $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans* $]0,1[$.

EXERCICE 9 .

Montrons que : $(\exists c\in]a,b[)$, $f(c)=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}.$

Soit h la fonction définie sur $[a,b]$ par : $h(x)=(a-x)(b-x)f(x)-(b-x)-(a-x)$.

Les fonctions $f_1:x\longmapsto(a-x)(b-x)$, f *et* $f_2:x\longmapsto-(b-x)-(a-x)$ *sont continues sur* $[a,b]$ *donc la fonction* $f=f_1\times f+f_2$ *est continue sur* $[a,b]$.

On a : $\begin{cases} h(a)=a-b>0 \\ h(b)=b-a<0 \end{cases}$ *donc* $h(a)\times h(b)<0.$

D' après le T.V.I, il existe $c\in]a,b[$ *tel que* $h(c)=0.$

C'est-à-dire : $(a-c)(b-c)f(c)-(b-c)-(a-c)=0$ *donc*

$$f(c)=\frac{(b-c)+(a-c)}{(a-c)(b-c)}\quad\begin{pmatrix} c\neq a\\ c\neq b\end{pmatrix}$$

d'où $(\exists c\in\,]a,b[)\,,\;\; f(c)=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}.$

EXERCICE 10 .

Montrons que : $(\exists c\in\,]0,1[)\,,\; f(c)=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c-1}.$

Soit h *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par :* $h(x)=x(x-1)f(x)-2x+1.$

Les fonctions $f_1: x\longmapsto x(x-1)$, f *et* $f_2: x\longmapsto -2x+1$ *sont continues* $[0,1]$ *donc la fonction* $f=f_1\times f+f_2$ *est continue sur* $[0,1]$.

On a $\begin{cases} h(0)=1\\ h(1)=-1\end{cases}$ *donc* $h(0)\times h(1)<0$

D'après le T.V.I, il existe $c\in\,]0,1[$ *tel que* $h(c)=0.$

C'est-à-dire : $c(c-1)f(c)-2c+1=0$ *donc*

$$(\exists c\in\,]0,1[)\,,\quad f(c)=\frac{1}{c}+\frac{1}{c-1}$$

EXERCICE 11 .

Montrons que : $(\exists c\in[0,1])\,,\; f(c)+f(1-c)=2c$

On considère la fonction définie sur $[0,1]$ *par :* $h(x)=f(x)+f(1-x)-2x$

La fonction $u: x\longmapsto 1-x$ *est continue sur* $[0,1]$ *et* $u([0,1])\subset[0,1]$ *et comme la fonction* f *est continue sur* $[0,1]$ *donc la fonction* $f\circ u$ *est continue sur* $[0,1]$. *La fonction* $v: x\longrightarrow -2x$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc la fonction* $h=f+f\circ u+v$ *est continue sur* $[0,1]$.

On a : $\begin{cases} h(0)=f(0)+f(1)\\ h(1)=f(1)+f(0)-2\end{cases}$ *et comme la fonction* f *est définie de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$ *alors :* $f(0)\in[0,1]$ *et* $f(1)\in[0,1]$ *c'est-à-dire* $0\leq f(0)\leq 1$ *et* $0\leq f(1)\leq 1$ *donc* $0\leq f(0)+f(1)\leq 2$ *d'où :* $\begin{cases} f(0)+f(1)-2\leq 0\\ f(0)+f(1)\geq 0\end{cases}$ *c'est-à-dire* $\begin{cases} h(0)\geq 0\\ h(1)\leq 0\end{cases}$ *donc* $h(0)\times h(1)\leq 0$, *d'après le théorème des valeurs intermédiares*

$$(\exists c\in[0,1])\,, h(c)=0$$

c'est-à-dire : $f(c)+f(1-c)=2c.$

D'où

$$(\exists c\in[0,1])\,,\; f(c)+f(1-c)=2c.$$

EXERCICE 12 .

Montrons que : $\left(\exists c\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right),\;\; f\left(c+\dfrac{1}{2}\right)=f(c)\,.$

On considère la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ *par :* $h(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{2}\right).$

La fonction $u : x \longmapsto x + \dfrac{1}{2}$ *est continue sur* $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ *et* $u\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset [0,1]$ *et comme la fonction* f *est continue sur* $[0,1]$ *donc la fonction* $f \circ u$ *est continue sur* $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, *donc la fonction* h *est continue sur* $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

On a : $\begin{cases} h(0) = f(0) - f\left(\dfrac{1}{2}\right) \\ \\ h\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(1) \end{cases}$ *et puisque* $f(0) = f(1)$ *alors*

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = -\left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -h(0)$$

donc $h(0) \times h\left(\dfrac{1}{2}\right) = -(h(0))^2$ *d'où* $h(0) \times h\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq 0$ *d'après le théorème des valeurs intermédiares*

$$\left(\exists c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), h(c) = 0$$

c'est-à-dire $\left(\exists c \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right)$, $f(c) - f\left(c + \dfrac{1}{2}\right) = 0$

D'où

$$\left(\exists c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c).$$

EXERCICE 13 .

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. *On considère la fonction numérique* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

1. *Montrons que* f *est strictement décroissante sur* $\left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]$.

   La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *car c'est la restriction d'une fonction polynôme.*

   Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+1)x^n - 2nx^{n-1} \\ &= x^{n-1}((n+1)x - 2n) \\ &= x^{n-1}(n+1)\left(x - \frac{2n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

   donc $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) = x^{n-1}(n+1)\left(x - \dfrac{2n}{n+1}\right)$.

   Si $0 \leq x \leq \dfrac{2n}{n+1}$ *alors* $x - \dfrac{2n}{n+1} \leq 0$ *et* $x^{n-1} > 0$ *donc* $\left(\forall x \in \left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]\right)$, $f'(x) \leq 0$ $\left(f' \text{ s'annule uniquement en } \dfrac{2n}{n+1}\right)$. *Alors* f *est strictement décroissante sur* $\left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]$.

2. *On déduit que :* $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0.$

   La fonction f *est strictement décroissante sur* $\left[0,\frac{2n}{n+1}\right]$, *et comme* $1<\frac{2n}{n+1}$ *alors* $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<f(1)$ *et comme* $f(1)=0$, *donc*

$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0.$$

3. *Montrons qu'il existe au moins* $\alpha\in\left]\frac{2n}{n+1},2\right[$ *tel que :* $f(\alpha)=0.$

   La fonction f *est continue sur* $\left[\frac{2n}{n+1},2\right]$ *.*

   On a : $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$ *et* $f(2)>0$ *donc* $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)\times f(2)<0$ *.*

   D'après le théorème des valeurs intermédiares l'équation $f(x)=0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $\left]\frac{2n}{n+1},2\right[$*. C'est-à-dire qu'il existe un réel* α *de l'intervalle* $\left]\frac{2n}{n+1},2\right[$ *tel que* $f(\alpha)=0.$

4. *Vérifions que :* $\alpha^n=\frac{1}{2-\alpha}.$

   On a

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0\\ &\Longleftrightarrow \alpha^{n+1}-2\alpha^n+1=0\\ &\Longleftrightarrow \alpha^n(\alpha-2)=-1\\ &\Longleftrightarrow \alpha^n=\frac{1}{2-\alpha}. \end{aligned}$$

   donc

$$\alpha^n=\frac{1}{2-\alpha}$$

www.etude – generale.com

Pr : **Yahya MATIOUI**