CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ

EXERCICE 1 .

♣ *On a* : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-3}{x^2+1}$ *donc*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^3+2x^2-3}{x^2+1}\right)' \\
&= \frac{(x^3+2x^2-3)'(x^2+1)-(x^3+2x^2-3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(3x^2+4x)(x^2+1)-(x^3+2x^2-3)\times 2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{3x^4+3x^2+4x^3+4x-(2x^4+4x^3-6x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{x^4+3x^2+10x}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

♣ *On a* : $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$ *donc*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{(x^2+x+1)^3}\right)' \\
&= -\frac{\left((x^2+x+1)^3\right)'}{(x^2+x+1)^6} \\
&= -\frac{3(x^2+x+1)'(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^6} \\
&= -\frac{3(2x+1)(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^6} \\
&= \frac{-6x-3}{(x^2+x+1)^4}
\end{aligned}$$

♣ *On a :* $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}$ *donc*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}\right)' \\
&= \dfrac{\left(\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}} \\
&= \dfrac{\dfrac{\left(x^2+3x-1\right)'(2-x)-\left(x^2+3x-1\right)(2-x)'}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}} \\
&= \dfrac{(2x+3)(2-x)-\left(x^2+3x-1\right)\times(-1)}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}} \\
&= \dfrac{4x-2x^2+6-3x+x^2+3x-1}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}} \\
&= \dfrac{-x^2+4x+5}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}}
\end{aligned}$$

♣ *On a :* $f(x)=x^2\sin(2x+1)$ *donc*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^2\sin(2x+1)\right)' \\
&= \left(x^2\right)'\sin(2x+1)+x^2\left(\sin(2x+1)\right)' \\
&= 2x\sin(2x+1)+2x^2\cos(2x+1).
\end{aligned}$$

EXERCICE 2 .

Soit f *la fonction définie par :* $f(x)=2x\sqrt{1-x}$.

1. *Déterminons* D_f *:*

   On a : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ 1-x\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ x\leq 1\}=\left]-\infty,1\right]$.

2. *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$ *:*

   On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} 1-x=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}-x=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$ *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}2x=-\infty$ *et par produit on obtient* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}2x\sqrt{1-x}=-\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)=-\infty$.

3. *On a :* $f(1)=0$ *donc*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{2x\sqrt{1-x}}{x-1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{2x\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}}{(x-1)\times\sqrt{1-x}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{2x(1-x)}{(x-1)\times\sqrt{1-x}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{-2x}{\sqrt{1-x}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-} -2x\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}
\end{aligned}$$

et comme $\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$ *et* $\lim_{x\longrightarrow 1^-}-2x=-2$ *par produit on obtient* $\lim_{x\longrightarrow 1^-}-2x\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}=-\infty$ *d'où* $\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$.

La courbe représentative de la fonction f *admet une demi-tangente à gauche en* $A(1,0)$ *dérigé vers le haut.*

4. *Montrons que :* $(\forall x\in\left]-\infty,1\right[),\quad f'(x)=\frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$

La fonction $u : x\longmapsto 1-x$ *est dérivable et strictement positive sur* $\left]-\infty,1\right[$ *donc la fonction* $v=\sqrt{u}$ *est dérivable sur* $\left]-\infty,1\right[$ *et comme la fonction* $w : x\longmapsto 2x$ *est dérivable sur* $\left]-\infty,1\right[$ *d'où la fonction* $f=w\times v$ *est dérivable sur* $\left]-\infty,1\right[$. $(D_{f'}=\left]-\infty,1\right[)$.

Soit $x\in\left]-\infty,1\right[$, *on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2x\sqrt{1-x}\right)'\\
&= (2x)'\sqrt{1-x}+(2x)\left(\sqrt{1-x}\right)'\\
&= 2\sqrt{1-x}+2x\times\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\\
&= 2\sqrt{1-x}+\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\\
&= \frac{2(1-x)-x}{\sqrt{1-x}}\\
&= \frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}
\end{aligned}$$

donc $(\forall x\in\left]-\infty,1\right[),\quad f'(x)=\frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$.

5. *Le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $2-3x$ *sur* $\left]-\infty,1\right[$. $\left(car\ (\forall x\in\left]-\infty,1\right[),\quad \sqrt{1-x}>0\right)$.

On a : $2-3x=0 \iff x=\dfrac{2}{3}$ *et comme* $a=-3<0$ *donc*

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-3x$		$+$	0	$-$	

d'où on déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

EXERCICE 3 .

1. *Montrons que :* $r(A)=B$ *et* $r(D)=C$.

   On considère r *la rotation de centre* O *et d'angle* $\dfrac{\pi}{2}$.

   On a $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$ *alors le point* B *est l'image de* A *par la rotation* r, *c'est-à-dire* $r(A)=B$.

   On a $\begin{cases} OD=OC \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$ *alors le point* C *est l'image de* D *par la rotation* r, *c'est-à-dire* $r(D)=C$.

2. *Déduisons que :* $(AD)\perp(BC)$ *et* $BC=AD$.

   On a $r(A)=B$ *et* $r(D)=C$ *et comme la rotation conserve la distance donc* $AD=BC$. *D'autre part l'angle de la rotation* r *est une mesure de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}}\right)$ *c'est-à-dire* $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. *Donc les droites* (AD) *et* (BC) *sont perpendiculaires.*

3. *Soit* M *l'image de* C *par la rotation* r.

   On a $r(A)=B$ *et* $r(C)=M$ *et comme l'angle de la rotation* r *est une mesure de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}}\right)$ *c'est-à-dire* $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. *Donc les droites* (AC) *et* (BM) *sont perpendiculaires.*