SÉRIE D'EXERCICES SUR LES INTÉGRALES

EXERCICE 1 (*Questions indépendantes*)

1. *En utilisant une intégration par partie, calculer l'intégrale :* $I = \int_1^2 \ln x dx$.
2. *Calculer l'intégrale :* $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x} |\ln x| \, dx$.
3. *En utilisant une intégration par partie, montrer que :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x . \ln(1+\cos x) dx = \frac{\pi}{2} - 1$

EXERCICE 2 .

1. *Vérifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\})\,,\ \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.
2. *Montrer que :* $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln 3$
3. *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_0^2 x \ln(x+1) dx = \frac{3}{2} \ln 3$.

EXERCICE 3 .

On pose : $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx$ *et* $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6) dx$.

1. *Montrer que :* $I = 1 - 3\ln 2$.
2. *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $J = -I$.

EXERCICE 4 .

1. *Déterminer les fonctions primitives de la fonction* $x \longmapsto 2x(x^2-1)^{2021}$ *sur* $\mathbb{R}$ *et vérifier que :* $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2021}$.
2. *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1) dx = 6\ln 3 - 2$

EXERCICE 5 .

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, *l'intégrale :* $I_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$.

1. *Calculer* I_1.

2. *Montrer que :* $(\forall n \geq 1)\,,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right).$

3. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\quad I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

4. *Démontrer par récurrence que :* $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^n}{n!} + I_n.$

5. *On pose, pour tout entier naturel* $n \geq 1$*,* $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

   a) *Calculer* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *et prouver que :* $(\forall n \geq 3)\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n.$

   b) *En déduire que* $(\forall n \geq 3)\,,\ 0 \leq u_n \leq u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}.$

   c) *Déduire :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$*, puis* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n.$

6. *Justifier enfin que :* $e^2 = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^n}{n!}\right).$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude − generale.com