FONCTIONS EXPONENTIELLES EXERCICRS CORRIGES

PROBLEME 1 .

Partie 01 *On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :* $g(x) = e^{2x} - 2x$

1) *Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.*

2) *En déduire que :* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g(x) > 0$. $(g(0) = 1)$.

Partie 02 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1) a) *Montrer que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

b) *Vérifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) \times \dfrac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$.

c) *Montrer que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

d) *En déduire que la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.*

2) a) *Vérifier que :* $(\forall x \in [0, +\infty[)$, $1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$ *et que :* $2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$

b) *En déduire que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c) *Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.*

d) *Montrer que :* $(\forall x \in [0, +\infty[)$, $f(x) - 2x \leq 0$, *et en déduire que (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.*

3) a) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) = \dfrac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$

b) *Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis le tableau de variations de la fonction f.*

4) *Tracer (D) et (C) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

PROBLEME 2 .

Partie 01 *.Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :* $g(x) = e^x - 2x$

1) *Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.*

2) *Vérifier que : $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.*

3) *En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ g(x) > 0$.*

Partie 02 *.On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2x}$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repére orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1) a) *Montrer que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.*

b) *Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.*

2) a) *Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\quad f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$*

b) *Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

c) *Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repére.*

3) *Tracer dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C).*

(on prendra $\dfrac{1}{e-2} \simeq 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0, 1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\dfrac{3}{2}$).

4) *Montrer que : $(\forall x \in [0, +\infty[),\ xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$*

1.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**